ECUACIONES E INECUACIONES

UNIDAD III

III.1 DEFINICIÓN DE NÚMERO COMPLEJO

A fin de entender la importancia del estudio de los números complejos, brevemente se definirán los diferentes conjuntos de números y se establecerán las sucesivas ampliaciones como consecuencia de la necesidad de realizar nuevas operaciones hasta llegar a la insuficiencia de los números reales.

Cuando se habla de conjuntos numéricos se suele comenzar por el conjunto de los números naturales. Los números *naturales* N son aquellos que sirven para contar, es decir son:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots\}$$

Nótese como el cero no es un número natural y que N es un conjunto infinito. En este conjunto sólo se pueden efectuar las operaciones de suma y producto.

Los números *enteros* aparecen cuando se necesita hacer restas, cuyos resultados no estén en N.

De esta manera, los números enteros se definen así:

$$Z = \{x \mid x = a - b, \quad a, b \in N\}$$

Esto significa que $Z = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

Este también es un conjunto infinito y en él sólo se pueden efectuar las operaciones de suma, resta y multiplicación.

Los números *racionales* surgen cuando se requieren efectuar divisiones, cuyos resultados no estén en Z. Por ello, los números racionales se definen como:

$$Q = \left\{ x = \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, \quad b \neq 0 \right\}$$

Esto significa que cualquier cociente de números enteros en el que el denominador no sea cero es un número racional.

Los números racionales también son un conjunto infinito y se pueden escribir como números decimales periódicos.

Ejemplos de racionales pueden ser: $\frac{3}{2}, -\frac{4}{7}, 0.35, 0.737373\cdots$.

Con estos números se puede sumar, restar, multiplicar y dividir, pero no se pueden extraer raíces cuyos resultados estén no en Q, por lo tanto se necesita definir un nuevo conjunto:

Así, los números *irracionales*, denotados por Q' son los números decimales que no son racionales. En general, este conjunto de números se puede clasificar como:

Números irracionales
- *No trascendentes* (Aquellos que se obtienen de la extracción de raíces inexactas)
- *Trascendentes*
  - Resultado de la evaluación de funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales
  - Números especiales como $\pi, e,$ etc.

Ejemplos de irracionales algebraicos pueden ser: $\sqrt{2}, \sqrt[3]{21}, \sqrt[5]{136}$.

Ejemplos de irracionales trascendentes pueden ser: $sen\,32°, \tan^{-1} 0.4367, \log_{10} 526, e^{4}$.

A fin de distinguir a los racionales de los irracionales basta con escribirlos en forma decimal. Son números racionales aquellos que son periódicos (sus decimales se repiten) o los que tienen un número finito de decimales. Por su parte, son números irracionales aquellos que poseen cifras decimales infinitas y que no son periódicos (sus decimales no se repiten).

En los números irracionales se puede sumar, restar, multiplicar, dividir, extraer cualquier raíz de un número positivo y extraer raíces de números negativos pero de índice impar.

El conjunto de los números *reales* es el formado por la unión de racionales e irracionales. Esto es:

$$R = Q \cup Q'$$

En este conjunto se pueden efectuar todas las operaciones, excepto dos: la división por cero y la extracción de raíces negativas de índice par.

Los números reales presentan insuficiencias cuando se desea extraer raíces negativas en general. Como consecuencia, se debe definir un nuevo conjunto:

Los números *imaginarios* son todos aquellos que se obtienen de extraer raíces de índice par a números negativos. Su unidad es: $i = \sqrt{-1}$ y su definición formal es:

$$I = \left\{ x = bi \quad \middle| \quad b \in R, \quad i = \sqrt{-1} \right\}$$

Ejemplos de números imaginarios pueden ser: $4i, -\frac{7}{5}i, 0.98i, \sqrt{-2}$.

La propiedad fundamental de los números imaginarios es que multiplicando su unidad por si misma se obtiene un número real. Esto es: $i^{2} = -1$

Con esta propiedad se resuelve el problema de la extracción de raíces cuadradas de números negativos, por ejemplo: $\sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3i$

Nótese como el producto de un número imaginario puro por uno real es otro imaginario puro.

Se denomina *número complejo* a toda una expresión de la forma $z = a + bi$ donde a, b son números reales e i es la unidad imaginaria. El primer término del binomio es la *parte real* del número complejo y la segunda es su *parte imaginaria*.

En términos generales, el conjunto de los números complejos en *forma binómica* puede expresarse de la siguiente forma:

$$C=\left\{z=a+bi \quad \middle| \quad a,b\in R, \quad i=\sqrt{-1}\right\}$$

Ejemplos de números complejos:

$z_1 = 3+8i$

$z_2 = -5-i$

$z_3 = \frac{4}{7}+\frac{9}{2}i$

$z_4 = 6.39-5.47i$

$z_5 = -\pi+\sqrt{-5}$

Si $a=0$, el número complejo es un imaginario puro. Si $b=0$ el número complejo se convierte en un número real.

Un número complejo es igual a cero sólo si sus dos partes son iguales a cero. Esto es:

$a+bi=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0,\, b=0$

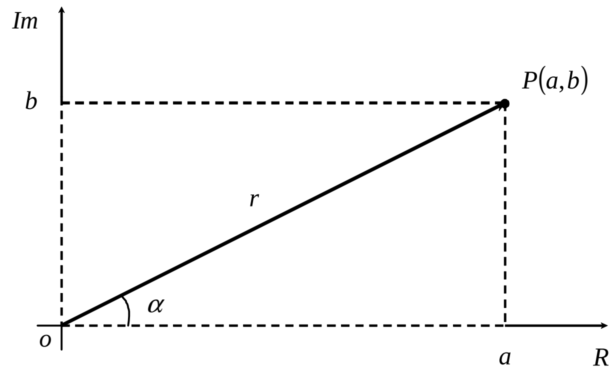
Dos números complejos son iguales si son iguales sus respectivas partes reales e imaginarias:

$a+bi=c+di \quad \Leftrightarrow \quad a=c,\, b=d$

Como puede verse la igualdad en los números complejos requiere de dos igualdades entre números reales.

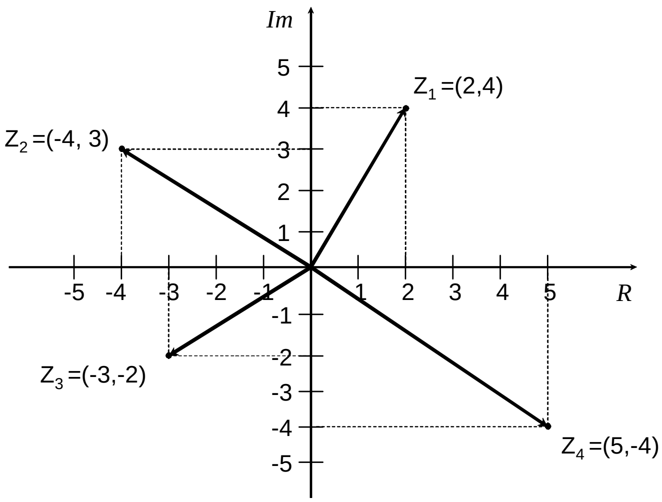
III.2 FORMAS DE EXPRESAR NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos pueden representarse gráficamente trazando dos ejes perpendiculares. El eje de abscisas representa la parte real a del número complejo y sobre el eje de ordenadas la parte imaginaria b. Por lo tanto, el número complejo $z=a+bi$ queda representado por el punto $P(a,b)$ del plano.



Ejemplo.
Representar gráficamente los siguientes números complejos:
$z_1 = 2+4i, \quad z_2 = -4+3i, \quad z_3 = -3-2i, \quad z_4 = 5-4i$

Solución.



El origen de coordenadas O y el punto P determinan un vector $\overrightarrow{OP}$ que se puede considerar la representación vectorial del número complejo $z = a+bi$. La longitud r del vector $\overrightarrow{OP}$ se llama *módulo* del número complejo.

De esta forma, a cada número complejo $z = a+bi$ corresponde un punto P, y recíprocamente, a cada punto corresponde un número complejo. De este modo queda establecida una aplicación biyectiva entre los puntos del plano y los números complejos. A la manera de representar un número complejo como $z = (a,b)$ se denomina forma *vectorial*.

De la figura de la página anterior se aprecia que se forma un triángulo rectángulo, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras y considerando el módulo positivo, se tiene: $r^2 = a^2 + b^2$

$$\therefore \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Por su parte, la tangente del ángulo está dada por: $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$

$$\therefore \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

El número r se llama *módulo* y α *argumento* del número complejo $z = a+bi$. Si $\alpha \in [0,2\pi]$ se obtiene el argumento principal.

La expresión $z = r(\cos\alpha + i\cdot sen\alpha)$ se llama forma *trigonométrica* del número complejo $z = a+bi$, donde a y b representan las proyecciones del módulo con respecto a los ejes, ya que se cumple que:

$$a = r\cos\alpha$$
$$b = rsen\alpha$$

Si $\cos\alpha + isen\alpha$ se le abrevia como cis, el número complejo se expresa en su forma cis, esto es: $z = rcis\alpha$.

Para fines aún más prácticos, un número complejo puede expresarse en su forma *polar o de Steinmetz* como: $z = r\angle\alpha$

La relación entre la función exponencial de un exponente imaginario y las funciones trigonométricas está dada por: $\cos\alpha + isen\alpha = e^{\alpha i}$. Por lo tanto, todo número complejo también puede expresarse en forma exponencial o de Euler como: $z = re^{\alpha i}$. Nótese que en esta forma, el argumento debe estar expresado en radianes.

De acuerdo con lo anterior, se pueden resumir todas las formas de expresar un número complejo en la siguiente tabla:

Forma	Expresión	Argumento dado en:
Binómica o Cartesiana	$z = a + bi$	-
Vectorial	$z = (a, b)$	-
Trigonométrica	$z = r(\cos\alpha + i \cdot sen\alpha)$	Grados
Cis	$z = rcis\alpha$	Grados
Polar	$z = r\angle\alpha$	Grados
Exponencial o de Euler	$z = re^{\alpha i}$	Radianes

Para efectuar las transformaciones entre las diversas formas se tiene que considerar lo siguiente:

- Para pasar de la forma binómica a la vectorial o viceversa basta tener en cuenta la correspondencia biunívoca entre los valores: $z = a + bi$ equivale a $z = (a, b)$

- Para convertir de la forma binómica a la forma trigonométrica se aplican las fórmulas:

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$

Hay que tener cuidado con la ubicación de los números en el plano a fin de no cometer errores con los signos. La siguiente tabla condensa los ajustes que deben aplicarse cuando no se tiene una calculadora que efectúe las conversiones de manera automática:

Signo	Cuadrante	Agregar al argumento:
+,+	I	0°
-,+	II	180°
-,-	III	180°
+,-	IV	0°

- Para pasar de la forma trigonométrica a la forma binómica se aplican las fórmulas:

$$a = r\cos\alpha \quad \text{y} \quad b = r\,sen\,\alpha$$

- Las formas cis y polar son sólo abreviaciones de la forma trigonométrica ya que el módulo y el argumento son los mismos.

- Para convertir de la forma trigonométrica a la exponencial el módulo no cambia pero el argumento debe expresarse en radianes. Inversamente, cuando se desea convertir de la forma exponencial a la trigonométrica debe expresarse en grados. Para ambos casos, sólo es necesario recordar que $2\pi\,rad. = 360°$.

Ejemplos.
1) Expresar el número $z_1 = 3 + 4i$ en todas sus formas.
Solución.
En forma vectorial: $z_1 = (3,4)$

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3} \approx \tan^{-1}(1.333) \approx 53.13°$$

como está en el primer cuadrante, el argumento no necesita ajuste.

$$z_1 = 5(\cos 53.13° + i\cdot sen\,53.13°)$$

$$z_1 = 5cis\,53.13°$$

$$z_1 = 5\angle 53.13°$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi\,rad. = 360° \\ x\,rad. = 53.13° \end{array}\right\} \quad x = \frac{(2\pi\,rad.)(53.13°)}{360°} = 0.9272\,rad.$$

$$z_1 = 5e^{0.9272i}$$

2) Dado $z_2 = (-2,-5)$ transformarlo a todas sus formas.
Solución.
En forma binómica: $z_2 = -2 - 5i$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \approx 5.38$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{-5}{-2} \approx \tan^{-1}(2.5) \approx 68.19°$$

como está en el tercer cuadrante, el argumento necesita un ajuste de 180°:

$$\alpha = 68.19° + 180° = 248.19°$$

$$z_2 = 5.38(\cos 248.19° + i\cdot sen\,248.19°)$$

$$z_2 = 5.38cis\,248.19°$$

$$z_2 = 5.38\angle 248.19°$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi\,rad. = 360° \\ \alpha\,rad. = 248.19° \end{array}\right\} \quad \alpha = \frac{(2\pi\,rad.)(248.19°)}{360°} = 4.331\,rad.$$

$$z_2 = 5.38e^{4.331i}$$

3) Transformar el número $z_3 = 6.5(\cos 40° + i\cdot sen\,40°)$ a todas sus formas.
Solución:

$$a = 6.5\cos 40° = 4.979$$

$b = 6.5 sen\,40° = 4.178$

$z_3 = 4.979 + 4.178i$

$z_3 = (4.979, 4.178)$

$z_3 = 6.5 cis\,40°$

$z_3 = 6.5\angle 40°$

$$\left.\begin{aligned}2\pi\,rad. &= 360°\\ \alpha\,rad. &= 40°\end{aligned}\right\}\quad \alpha = \frac{(2\pi\,rad.)(40°)}{360°} = 0.698\,rad.$$

$z_3 = 6.5e^{0.698i}$

4) Obtener todas las equivalencias del número $z_4 = 2cis150°$.

Solución:

$a = 2\cos 150° = -1.732$

$b = 2sen150° = 1$

$z_4 = -1.732 + i$

$z_4 = (-1.732, 1)$

$z_4 = 2(\cos 150° + i\cdot sen150°)$

$z_4 = 2\angle 150°$

$$\left.\begin{aligned}2\pi\,rad. &= 360°\\ \alpha\,rad. &= 150°\end{aligned}\right\}\quad \alpha = \frac{(2\pi\,rad.)(150°)}{360°} = 2.617\,rad.$$

$z_4 = 2e^{2.617i}$

5) Convertir el número $z_5 = -4.7\angle 60°$ a todas sus formas.

Solución:

$a = -4.7\cos 60° = -2.35$

$b = -4.7 sen\,60° = -4.070$

$z_5 = -2.35 - 4.07i$

$z_5 = (-2.35, -4.07)$

$z_5 = -4.7(\cos 60° + i\cdot sen\,60°)$

$z_5 = -4.7 cis\,60°$

$$\left.\begin{aligned}2\pi\,rad. &= 360°\\ \alpha\,rad. &= 60°\end{aligned}\right\}\quad \alpha = \frac{(2\pi\,rad.)(60°)}{360°} = 1.047\,rad.$$

$z_5 = -4.7e^{1.047i}$

6) Expresar en sus diversas formas al número $z_6 = 8e^{3.5i}$.

Solución:

$$\left.\begin{aligned}2\pi\,rad. &= 360°\\ 3.5\,rad. &= \alpha°\end{aligned}\right\}\quad \alpha = \frac{(3.5\,rad.)(360°)}{2\pi\,rad.} = 200.53°$$

$z_6 = 8(\cos 200.53° + i\cdot sen\,200.53°)$

$z_6 = 8 cis\,200.53°$

$z_6 = 8\angle 200.53°$
$a = 8\cos 200.53° = -7.491$
$b = 8 sen\, 200.53° = -2.805$
$z_6 = -7.491 - 2.805i$
$z_6 = (-7.491, -2.805)$

III.3 OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

III.3.1 SUMA

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos, entonces $z_1 + z_2$ se define como:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Esto significa que se suman respectivamente las partes reales y las imaginarias. Esta operación sólo se puede efectuar en forma binómica y vectorial.

Ejemplos.
Sumar los siguientes números complejos:
1) $z_1 = 4 + 2i$ y $z_2 = 3 + 6i$
Solución:
$z_1 + z_2 = (4 + 3) + (2 + 6)i = 7 + 8i$

2) $z_1 = \frac{5}{2} + 9i$ y $z_2 = \frac{7}{2} - 4i$
Solución:
$z_1 + z_2 = \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2}\right) + (9 + (-4))i = 6 + 5i$

3) $z_1 = (3.9, -1.4)$ y $z_2 = (-5.4, -2.6)$
Solución:
$z_1 + z_2 = (3.9 + (-5.4), -1.4 + (-2.6)) = (-1.5, -4)$

III.3.2 RESTA

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos, entonces $z_1 - z_2$ se define como:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Para obtener la resta de dos números complejos se restan respectivamente las partes reales y las imaginarias. Al igual que la suma, la resta sólo se puede efectuar en forma binómica y vectorial.

Ejemplos.
Restar los siguientes números complejos:
1) $z_1 = 5 + 10i$ y $z_2 = 1 + 8i$

Solución:
$z_1 - z_2 = (5-1) + (10-8)i = 4 + 2i$

2) $z_1 = -\frac{3}{4} - \frac{6}{5}i$ y $z_2 = \frac{7}{3} - \frac{2}{7}i$
Solución:
$$z_1 - z_2 = \left(-\frac{3}{4} - \frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{6}{5} - \left(-\frac{2}{7}\right)\right)i$$
$$= \frac{-9-28}{12} + \frac{-42+10}{35}i = -\frac{37}{12} - \frac{32}{35}i$$

3) $z_1 = (-6.4, 4.5)$ y $z_2 = (-2.2, 1.3)$
Solución:
$z_1 - z_2 = (-6.4 - (-2.2), 4.5 - 1.3) = (-4.2, 3.2)$

III.3.3 PRODUCTO

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos, entonces $z_1 \cdot z_2$ viene dado por: $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$, pero considerando que $i^2 = -1$ y agrupando las respectivas partes reales y las imaginarias, se tiene que:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplos.
Multiplicar los siguientes números complejos:
1) $z_1 = 5 + 3i$ y $z_2 = 4 + 2i$
Solución:
$z_1 \cdot z_2 = (5(4) - 3(2)) + (5(2) + 3(4))i = (20-6) + (10+12)i = 14 + 22i$

2) $z_1 = 7 - i$ y $z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{9}{4}i$
Solución:
$$z_1 \cdot z_2 = \left(7\left(-\frac{3}{2}\right) - (-1)\left(-\frac{9}{4}\right)\right) + \left(7\left(-\frac{9}{4}\right) + (-1)\left(-\frac{3}{2}\right)\right)i$$
$$= \left(-\frac{21}{2} - \frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{63}{4} + \frac{3}{2}\right)i$$
$$= \left(\frac{-42-9}{4}\right) + \left(\frac{-63+6}{4}\right)i = -\frac{51}{4} - \frac{57}{4}i$$

3) $z_1 = (-10, -2.5)$ y $z_2 = (-3.5, 8)$
Solución:
$z_1 \cdot z_2 = (-10(-3.5) - (-2.5)(8), -10(8) + (-2.5)(-3.5)) = (35 + 20, -80 + 8.75) = (55, -71.25)$

Sean $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i \cdot sen\,\alpha_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i \cdot sen\,\alpha_2)$ dos números complejos, entonces el producto $z_1 \cdot z_2$ viene dado por:

$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\alpha_1 + i \cdot sen\,\alpha_1) \cdot r_2(\cos\alpha_2 + i \cdot sen\,\alpha_2)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - sen\,\alpha_1 sen\,\alpha_2) + i(sen\,\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 sen\,\alpha_2)]$

Pero se sabe que:

$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - sen\,\alpha_1 sen\,\alpha_2$

$sen(\alpha_1 + \alpha_2) = sen\,\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 sen\,\alpha_2$

Por lo tanto:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \cdot sen(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

Similarmente, si $z_1 = r_1\angle\alpha_1$ y $z_2 = r_2\angle\alpha_2$ entonces el producto $z_1 \cdot z_2$ es:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\angle(\alpha_1 + \alpha_2)$$

De forma análoga, si $z_1 = r_1 cis\,\alpha_1$ y $z_2 = r_2 cis\,\alpha_2$ entonces el producto $z_1 \cdot z_2$ está dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 cis(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Esto significa que en estos tres casos se multiplican respectivamente los módulos y se suman los argumentos. Las multiplicaciones en estas formas simplifican muchas operaciones por su facilidad.

Ejemplos.
Multiplicar los siguientes números complejos:

1) $z_1 = 2(\cos 40° + i \cdot sen\,40°)$ y $z_2 = 8(\cos 25° + i \cdot sen\,25°)$

Solución:

$z_1 \cdot z_2 = 2(\cos 40° + i \cdot sen\,40°) \cdot 8(\cos 25° + i \cdot sen\,25°) = 16(\cos 65° + i \cdot sen\,65°)$

2) $z_1 = 4\angle 20°$ y $z_2 = 3\angle 50°$

Solución:

$z_1 \cdot z_2 = (40\angle 20°)(3\angle 50°) = 12\angle 70°$

3) $z_1 = 6cis\,32°$ y $z_2 = -4cis\,27°$

$z_1 \cdot z_2 = (6cis\,32°)(-4cis\,27°) = -24cis\,59°$

Sean $z_1 = r_1 e^{\alpha_1 i}$ y $z_2 = r_2 e^{\alpha_2 i}$ dos números complejos, entonces el producto $z_1 \cdot z_2$ se define como:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{(\alpha_1 + \alpha_2)i}$$

Esto significa que se multiplican respectivamente los módulos y se suman los argumentos en radianes de la exponencial.

Ejemplos.
Multiplicar los siguientes números complejos expresados en forma exponencial:

1) $z_1 = 5e^{2i}$ y $z_2 = 3e^{4i}$

Solución:

$z_1 \cdot z_2 = (5e^{2i})(3e^{4i}) = 15e^{6i}$

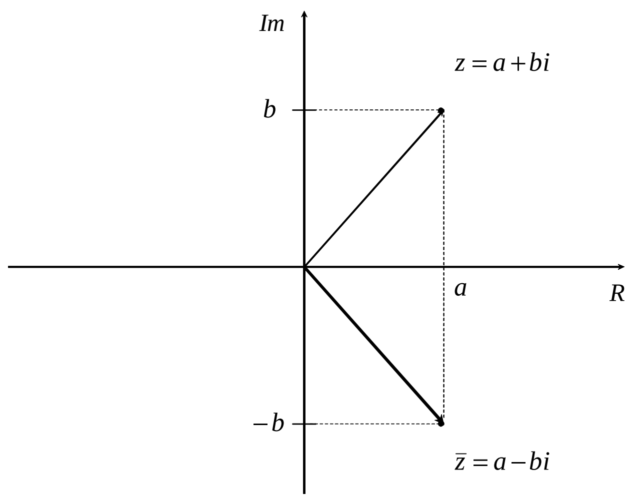
2) $z_1 = -2.6e^{1.4i}$ y $z_2 = 1.3e^{2.7i}$
Solución:
$z_1 \cdot z_2 = (-2.6e^{1.4i})(1.3e^{2.7i}) = -3.38e^{4.1i}$

III.3.4 COMPLEJOS CONJUGADOS Y COMPLEJOS OPUESTOS

Dos números complejos se llaman *conjugados* si tienen iguales sus componentes reales y opuestas sus componentes imaginarias. Gráficamente son simétricos respecto del eje real (eje de abscisas).

Esto es, dado un número complejo $z = a + bi$, su *conjugado* denotado como $\bar{z}$ es:

$$\bar{z} = a - bi.$$

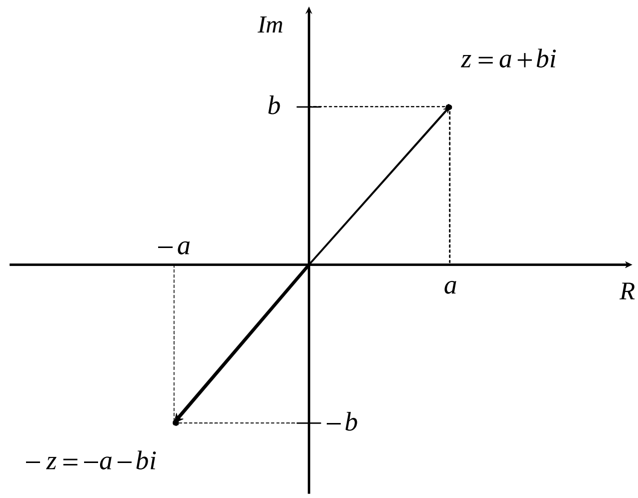


Ejemplos.
1) $z_1 = 7 - 2i$
$\bar{z}_1 = 7 + 2i$
2) $z_2 = -\frac{11}{3} + \frac{9}{5}i$
$z_2 = -\frac{11}{3} - \frac{9}{5}i$
3) $z_3 = (-5.3, -6.2)$
$\bar{z}_3 = (-5.3, 6.2)$

Dos números complejos se llaman *opuestos* si tienen opuestas sus dos componentes. Gráficamente son simétricos respecto del origen de coordenadas.

Esto es, dado un número complejo $z = a + bi$, su opuesto denotado como $-z$ es:

$$-z = -a - bi$$



Propiedades:

1. Si $z = r\angle\alpha$ entonces $-z = r\angle\alpha + 180°$
2. $\overline{-z} = -(\overline{z})$
3. Si $z = r\angle\alpha$ entonces $\overline{z} = r\angle -\alpha$

Los números complejos con magnitud negativa no existen, sin embargo, algunos textos los contemplan, por lo que en ese caso se debe aplicarse la siguiente expresión para transformarlos a una notación correcta:

$$z = -r\angle\alpha = r\angle\alpha + 180°$$

Similarmente, en el caso de que erróneamente se presente un número complejo con magnitud negativa y argumento negativo, debe aplicarse la siguiente expresión para convertirlo a una forma correcta:

$$z = -r\angle -\alpha = r\angle -\alpha + 180$$

Si se tiene un número complejo con argumento negativo y si se desea hacerlo positivo, basta con ajustarlo con:

$$z = r\angle -\alpha = r\angle -\alpha + 360°$$

Ejemplos.

1) $z_1 = -10\angle 30° = 10\angle 210°$
2) $z_2 = -10\angle -30° = 10\angle 150°$
3) $z_3 = 10\angle -30° = 10\angle 330°$

III.3.5 COCIENTE

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos. Para obtener $\frac{z_1}{z_2}$ basta con multiplicar el numerador y el denominador por el complejo conjugado del z_2 a fin de que el denominador resultante sea real:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplos.
Dividir los siguientes números complejos:

1) $z_1=26-13i$ y $z_2=8+i$

Solución:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{[26(8)+(-13)(1)]+[(-13)(8)-26(1)]i}{8^2+1^2}=\frac{(208-13)+(-104-26)i}{64+1}=\frac{195-130i}{65}=3-2i$$

2) $z_1=6+10i$ y $z_2=1-2i$

Solución:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{[6(1)+10(-2)]+[10(1)-6(-2)]i}{1^2+(-2)^2}=\frac{(6-20)+(10+12)i}{1+4}=\frac{-14+22i}{5}=-\frac{14}{5}+\frac{22}{5}i=-2.8+4.4i$$

3) $z_1=(27,-21)$ y $z_2=(-5,3)$

Solución:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{[27(-5)+(-21)(3)]+[(-21)(-5)-27(3)]i}{(-5)^2+3^2}=\frac{(-135-63)+(105-81)i}{25+9}=\frac{-198+24i}{34}=-\frac{99}{17}+\frac{12}{17}i$$

Sean $z_1=r_1(\cos\alpha_1+i\cdot sen\,\alpha_1)$ y $z_2=r_2(\cos\alpha_2+i\cdot sen\,\alpha_2)$ dos números complejos. El cociente $\frac{z_1}{z_2}$ viene dado por:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\alpha_1+i\cdot sen\,\alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2+i\cdot sen\,\alpha_2)}$$

si se multiplica el numerador y el denominador por el complejo conjugado de z_2:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\alpha_1+i\cdot sen\,\alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2+i\cdot sen\,\alpha_2)}\cdot\frac{r_2(\cos\alpha_2-i\cdot sen\,\alpha_2)}{r_2(\cos\alpha_2-i\cdot sen\,\alpha_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\cdot r_2[(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+sen\,\alpha_1 sen\,\alpha_2)+i(-\cos\alpha_1 sen\,\alpha_2+sen\,\alpha_1\cos\alpha_2)]}{r_2{}^2(\cos^2\alpha_2+sen^2\,\alpha_2)}$$

Pero se sabe que:

$$\cos(\alpha_1-\alpha_2)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+sen\,\alpha_1 sen\,\alpha_2$$

$$sen(\alpha_1-\alpha_2)=sen\,\alpha_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1 sen\,\alpha_2$$

$$\cos^2\alpha_2+sen^2\,\alpha_2=1$$

Por lo tanto:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha_1-\alpha_2)+i\cdot sen(\alpha_1-\alpha_2)]$$

Similarmente, si $z_1 = r_1 \angle \alpha_1$ y $z_2 = r_2 \angle \alpha_2$, entonces el cociente $\frac{z_1}{z_2}$ es:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \left(\alpha_1 - \alpha_2 \right)$$

De forma análoga, si $z_1 = r_1 cis \alpha_1$ y $z_2 = r_2 cis \alpha_2$ entonces el cociente $\frac{z_1}{z_2}$ está dado por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} cis \left(\alpha_1 - \alpha_2 \right)$$

Esto significa que en estos tres casos se dividen respectivamente los módulos y se restan los argumentos. Los cocientes en estas formas también simplifican muchas operaciones por su facilidad.

Ejemplos.
Dividir los siguientes números complejos:
1) $z_1 = 10(\cos 60° + i \cdot sen 60°)$ y $z_2 = 2(\cos 35° + i \cdot sen 35°)$
Solución:
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{2}[\cos(60° - 35°) + i \cdot sen(60° - 35°)] = 5(\cos 25° + i \cdot sen 25°)$

2) $z_1 = 8\angle 140°$ y $z_2 = 4\angle 290°$
Solución:
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{4}\angle(140° - 290°) = 2\angle -150° = -2\angle 30°$

3) $z_1 = 6 cis 14°$ y $z_2 = 15 cis 121°$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{15} cis(14° - 121°) = 0.4 cis(-107°) = 0.4 cis\, 253°$

Sean $z_1 = r_1 e^{\alpha_1 i}$ y $z_2 = r_2 e^{\alpha_2 i}$ dos números complejos, entonces el cociente $\frac{z_1}{z_2}$ se define como:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)i}$$

Esto significa que se dividen respectivamente los módulos y se restan los argumentos en radianes de la forma exponencial.

Ejemplos.
Dividir los siguientes números complejos expresados en forma exponencial:
1) $z_1 = 24e^{5i}$ y $z_2 = 8e^{3i}$
Solución:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{24}{8}e^{(5-3)i}=3e^{2i}$$

2) $z_1=17e^{1.8i}$ y $z_2=5e^{-2.9i}$
Solución:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{17}{5}e^{(1.8-(-2.9))i}=3.4e^{4.7i}$$

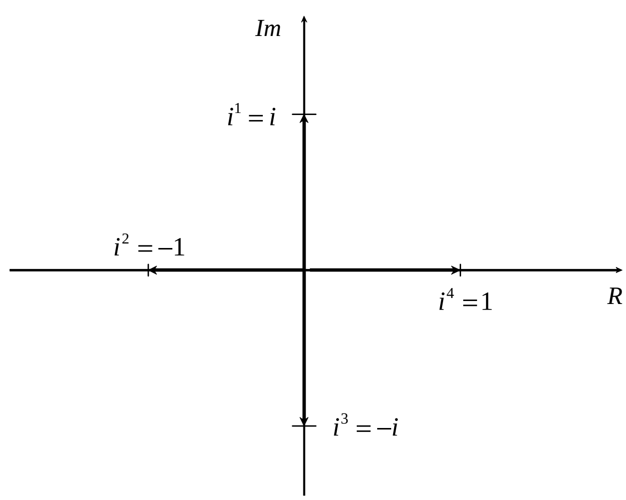
III.3.6 POTENCIA

Imaginarios puros

Las potencias de i superiores a uno se pueden reducir de la siguiente manera:

$$i^2=-1$$
$$i^3=i^2i=(-1)i=-i$$
$$i^4=i^3i=(-i)i=-i^2=1$$
$$i^5=i^4i=(1)i=i$$
$$i^6=i^5i=(i)i=i^2=-1$$

Si se graficaran los resultados anteriores se observa que las potencias inician en -1 y que cada vez que se multiplica por i el resultado gira 90° a la izquierda hasta que llega nuevamente a -1 donde empieza un nuevo ciclo.



Complejos

Considerando que $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\angle(\alpha_1+\alpha_2)$
Si $z_1=z_2$

$$(z_1)^2=z_1\cdot z_1=r_1\cdot r_1\angle(\alpha_1+\alpha_1)=r_1^{\,2}\angle 2\alpha_1$$

$(z_1)^3 = z_1 \cdot (z_1)^2 = r_1 \cdot r_1^{\ 2} \angle (2\alpha_1 + \alpha_1) = r_1^{\ 3} \angle 3\alpha_1$
$(z_1)^4 = z_1 \cdot (z_1)^3 = r_1 \cdot r_1^{\ 3} \angle (3\alpha_1 + \alpha_1) = r_1^{\ 4} \angle 4\alpha_1$
generalizando se tiene:

$$(z_1)^n = r_1^{\ n} \angle n\alpha_1$$

Esto significa que para encontrar la potencia enésima de un número complejo, basta con elevar el módulo a esa potencia y el argumento multiplicarlo por n.

De acuerdo con las equivalencias expuestas, la fórmula anterior puede escribirse en forma trigonométrica como:

$$z^n = [r(\cos\alpha + i \cdot sen\,\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i \cdot sen\, n\alpha) \qquad n \in Z$$

Esta expresión se conoce como la *fórmula de De Moivre.*

Para obtener la potencia enésima de un número complejo expresado en forma binómica se multiplica por si mismo n veces, sin embargo, en la práctica no se ocupa por la gran cantidad de operaciones que deben efectuarse.

Ejemplos.
1) $z_1 = 2\angle 15°$
$z_1^{\ 4} = 2^4 \angle 4(15°) = 16\angle 60°$
2) $z_2 = 3(\cos 22° + i \cdot sen\, 22°)$
$z_2^{\ 5} = [3(\cos 22° + isen\, 22°)]^5 = 3^5[\cos 5(22°) + i \cdot sen\, 5(22°)] = 243(\cos 110° + i \cdot sen 110°)$
3) $z_3 = \frac{1}{4} cis\, 45°$
$z_3^{\ 6} = \left(\frac{1}{4}\right)^6 cis\, 6(45°) = \frac{1}{4{,}096} cis\, 270°$

Ejemplo.
Obtener $z_4^{\ 5}$ si $z_4 = 3 + 4i$ mediante productos y comprobar el resultado usando la forma polar.
Solución:
$z_4^{\ 2} = (3+4i)(3+4i) = (9-16) + (12+12)i = -7+24i$
$z_4^{\ 3} = (-7+24i)(3+4i) = (-21-96) + (72-28)i = -117+44i$
$z_4^{\ 4} = (-117+44i)(3+4i) = (-351-176) + (132-468)i = -527-336i$
$z_4^{\ 5} = (-527-336i)(3+4i) = (-1{,}581+1{,}344) + (-1{,}008-2{,}108)i = -237-3{,}116i$
Convirtiendo z_4 a forma polar:
$r = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
$\alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3} = \tan^{-1}(1.333) = 53.13°$
$\Rightarrow \quad z_4 = 5\angle 53.13°$
$z_4^{\ 5} = 5^5 \angle 5(53.13°) = 3{,}125\angle 265.65°$
Transformando este resultado a forma binómica:

$a = 3{,}125\cos 265.65° = -237$
$b = 3{,}125\, sen\, 265.65° = -3{,}116$
$\therefore \quad z_4^{\ 5} = -237 - 3{,}116i$

Nótese como para obtener el mismo resultado en forma binómica se tuvieron que realizar más operaciones que en la forma polar. Por ello, conviene expresar el número complejo en alguna de las formas que posean módulo y argumento y aplicar la fórmula de De Moivre.

III.3.7 EXTRACCIÓN DE RAÍCES

Para extraer la raíz enésima de un número complejo de la forma $z = r\angle\alpha$, se emplea la siguiente expresión:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\ \angle\frac{\alpha + 360°k}{n}$$

donde $k = 0,1,2,3,\cdots,(n-1)$, para n entera positiva.

A la raíz que se obtiene cuando $k = 0$, se le llama raíz *principal*, las demás raíces son *cíclicas*. Se aprecia que todas las raíces tienen el mismo módulo. Por lo tanto, las n raíces están situadas sobre una circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt[n]{r}$. Si se dividen los $360°$ en n partes, cada una de ellas mide $\frac{360°}{n}$. De esta forma, el argumento de las raíces cíclicas se obtiene girando $n-1$ veces $\frac{360°}{n}$ a partir de la raíz principal (se divide la circunferencia en n sectores circulares, del mismo tamaño a partir de la raíz principal).

Ejemplos.
1) Obtener las raíces cuartas de $z = 16\angle 60°$
Solución.

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16}\ \angle\frac{60° + 360°k}{4}$$

$k = 0: \quad z_1 = 2\ \angle 15°$
$k = 1: \quad z_2 = 2\ \angle 105°$
$k = 2: \quad z_3 = 2\ \angle 195°$
$k = 3: \quad z_4 = 2\ \angle 285°$

La raíz principal es z_1 y las raíces cíclicas se obtienen sumando reiteradamente a $15°$ la cuarta parte de $360°$, que es $90°$

2) Obtener las raíces cúbicas de $z = 64(\cos 45° + i\cdot sen\,45°)$
Solución.

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{45° + 360°k}{3} + i\cdot sen\frac{45° + 360°k}{3}\right)$$

$k = 0: \quad z_1 = 4\left(\cos 15° + i\cdot sen 15°\right)$
$k = 1: \quad z_2 = 4\left(\cos 135° + i\cdot sen 135°\right)$
$k = 2: \quad z_3 = 4\left(\cos 255° + i\cdot sen 255°\right)$

La raíz principal es z_1 y las raíces cíclicas se obtienen sumando reiteradamente a $15°$ la tercera parte de $360°$, que es $120°$.

3) Obtener las raíces quintas de $z = 140 cis 150°$ y representarlas gráficamente.
Solución.

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{140}\ cis \frac{150° + 360° k}{5}$$

$$k = 0: \quad z_1 = 2.686\, cis 30°$$

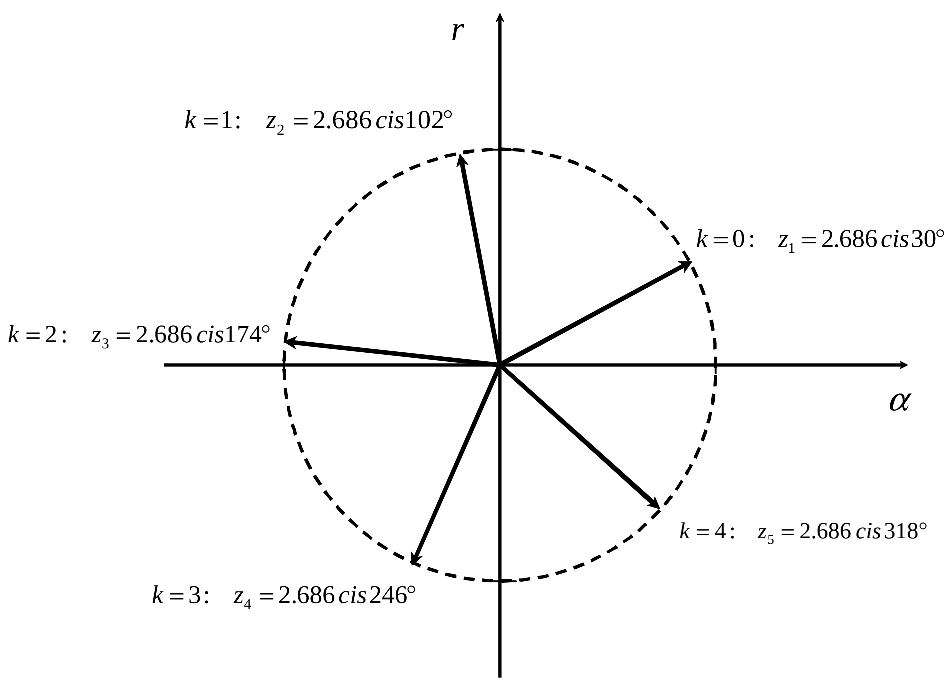
$$k = 1: \quad z_2 = 2.686\, cis 102°$$

$$k = 2: \quad z_3 = 2.686\, cis 174°$$

$$k = 3: \quad z_4 = 2.686\, cis 246°$$

$$k = 4: \quad z_5 = 2.686\, cis 318°$$

Nótese como la raíz principal es z_1 y las raíces cíclicas se obtienen sumando reiteradamente $\frac{360}{5} = 72°$ a $30°$.



III.4 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS Y EJEMPLOS

Las propiedades que cumplen las cuatro operaciones básicas en los números complejos son las siguientes:

Para todo $z_1, z_2, z_3 \in C$:

Cerradura:

- Para la suma algebraica: $z_1 \pm z_2 \in C$
- Para el producto: $z_1 \cdot z_2 \in C$
- Para el cociente: $\frac{z_1}{z_2} \in C, \quad z_2 \neq 0$

Asociatividad:

- Para la suma algebraica: $z_1 \pm (z_2 \pm z_3) = (z_1 \pm z_2) \pm z_3$
- Para el producto: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

Conmutatividad:

- Para la suma: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- Para el producto: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Distributividad:

- $z_1 \cdot (z_2 \pm z_3) = z_1 \cdot z_2 \pm z_1 \cdot z_3$

Elementos idénticos:

- Para la suma algebraica: $z_1 \pm 0 = z_1$
- Para el producto: $z_1 \cdot (1) = z_1$

Elementos inversos:

- Para la suma algebraica: $z_1 \pm (\mp z_1) = 0$
- Para el producto: $z_1 \cdot (z_1)^{-1} = 1 \quad z_1 \neq 0$

Para los *complejos conjugados* se cumple que:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$
- $|r|^2 = z \cdot \overline{z}$
- $z_1 = \overline{z}_1 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 \in R$
- $z_1 + \overline{z}_1 \in R$
- $z_1 \cdot \overline{z}_1 \in R$
- $\operatorname{Re}\{z\} = \frac{z + \overline{z}}{2}$ (parte real de z)
- $\operatorname{Im}\{z\} = \frac{z - \overline{z}}{2}$ (parte imaginaria de z)

Ejemplo.

Dados $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 9\angle 42°$, $z_3 = (-4, 8)$, $z_4 = 6cis110°$, encontrar $\left(z_2 + \frac{z_4}{z_1}\right)z_3$ de forma aproximada y expresar el resultado en forma polar.

Solución.

Convirtiendo z_2 a forma binómica:

$$z_2 = 9(\cos 42° + isen 42°) = 6.688 + 6.022i$$

Convirtiendo z_1 a forma polar:

$$z_1 = \sqrt{3^2 + 5^2}\angle \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = \sqrt{34}\angle \tan^{-1}(1.666) = 5.830\angle 59.03°$$

$$\frac{z_4}{z_1} = \frac{6\angle 110°}{5.830\angle 59.03} = 1.029\angle 50.97° = 1.029(cos 50.97° + i \cdot sen 50.97°) = 0.648 + 0.799i$$

$$z_2 + \frac{z_4}{z_1} = (6.688 + 6.022i) + (0.648 + 0.799i) = 7.336 + 6.821i$$

$$= \sqrt{7.336^2 + 6.821^2}\angle tan^{-1}\left(\frac{6.821}{7.336}\right) = \sqrt{100.34}\angle tan^{-1}(0.929798255) = 10.017\angle 42.91°$$

Convirtiendo z_3 a forma polar:

$z_3 = \sqrt{(-4)^2 + 8^2}\angle tan^{-1}\left(\frac{8}{-4}\right) = \sqrt{80}\angle tan^{-1}(-2) = 8.944\angle -63.43494882°$, pero por estar en el segundo cuadrante hay que ajustar el argumento, por lo tanto:

$$z_3 = 8.944\angle(-63.43494882° + 180°) = 8.944\angle 116.56°$$

finalmente:

$$\left(z_2 + \frac{z_4}{z_1}\right)z_3 = (10.017\angle 42.91°)(8.944\angle 116.56°) = 89.592\angle 159.47°$$

Ejemplo.

Sean $z_1 = 7(\cos 25° + i \cdot sen 25°)$, $z_2 = (3, 7)$, $z_3 = 2e^{1.5i}$, $z_4 = \frac{2}{3} - 6i$

Obtener $\left(\frac{z_1}{z_4} - 3z_3\right)^2 - (z_2)^3$ de forma aproximada y expresar el resultado en forma binómica.

Solución.

Convirtiendo z_4 a forma polar:

$$z_4 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (-6)^2}\angle \tan^{-1}\left(\frac{-6}{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{36.444}\angle \tan^{-1}(-9) = 6.036\angle -83.65°$$

$$\frac{z_1}{z_4} = \frac{7\angle 25°}{6.036\angle -83.65°} = 1.159\angle 108.65° = 1.159(\cos 108.65° + i \cdot sen 108.65°)$$

$$= -0.371 + 1.098i$$

$3z_3 = 3\left(2e^{1.5i}\right) = 6e^{1.5i}$

Convirtiendo $3z_3$ a forma polar y a binómica:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi\ rad. = 360° \\ 1.5\ rad. = \alpha° \end{array}\right\} \quad \alpha = \frac{(1.5\ rad.)(360°)}{2\pi\ rad.} = 85.94°$$

$3z_3 = 6\angle 85.94° = 6(\cos 85.94° + i \cdot sen\,85.94°) = 0.424 + 5.984i$

$\frac{z_1}{z_4} - 3z_3 = (-0.371 + 1.098i) - (0.424 + 5.984i) = -0.795 - 4.886i$

$= \sqrt{(-0.795)^2 + (-4.886)^2}\angle \tan^{-1}\left(\frac{-4.886}{-0.795}\right) = \sqrt{24.505}\angle \tan^{-1}(6.145) = 4.950\angle 80.75°$, pero por estar en el tercer cuadrante hay que ajustar el argumento, por lo tanto:

$\frac{z_1}{z_4} - 3z_3 = 4.950\angle(80.75° + 180°) = 4.950\angle 260.75°$

$\left(\frac{z_1}{z_4} - 3z_3\right)^2 = (4.950\angle 260.75°)^2 = 24.505\angle 521.50° = 24.505\angle 161.51°$

$= 24.505(\cos 161.51° + i \cdot sen 161.51°) = -23.240 + 7.771i$

Convirtiendo z_2 a forma polar:

$z_2 = \sqrt{3^2 + 7^2}\angle \tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right) = \sqrt{58}\angle \tan^{-1}(2.333) = 7.615\angle 66.80°$

$(z_2)^3 = (7.615\angle 66.80°)^3 = 441.580\angle 200.40° = 441.580(\cos 200.40° + i \cdot sen\,200.40°)$

$= -413.341 - 153.922i$

finalmente:

$\left(\frac{z_1}{z_4} - 3z_3\right)^2 - (z_2)^3 = (-23.240 + 7.771i) - (-413.341 - 153.922i) = 390.101 + 161.693i$

Ejemplo.

Dados $z_1 = 8(\cos 55° + i \cdot sen\,55°)$, $z_2 = -10 - 4i$, $z_3 = 2cis\,73°$, $z_4 = 5\angle 60°$, $z_5 = 11e^{4i}$

Obtener $\sqrt[3]{z_2 \cdot z_4 + \frac{z_1}{\overline{z}_3 - z_5}}$ de forma aproximada y expresar el resultado en forma trigonométrica.

Solución.

Convirtiendo z_2 a forma polar:

$z_2 = \sqrt{(-10)^2 + (-4)^2}\angle tan^{-1}\left(\frac{-4}{-10}\right) = \sqrt{116}\angle tan^{-1}(0.4) = 10.77032961\angle 21.80°$, pero por estar en el tercer cuadrante hay que ajustar el argumento, por lo tanto:

$z_2 = 10.77032961\angle(21.80° + 180°) = 10.77032961\angle 201.80°$

$z_2 \cdot z_4 = (10.77032961\angle 201.80°)(5\angle 60°) = 53.851\angle 261.80°$

$z_2 \cdot z_4 = 53.851(\cos 261.80° + i \cdot sen\,261.80°) = -7.680 - 53.300i$

$z_3 = 2\angle 73° = 2(\cos 73° + i \cdot sen\,73°) = 0.584 + 1.912i$

$\overline{z}_3 = 0.584 - 1.912i$

Convirtiendo z_5 a forma polar y a binómica:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi\, rad. = 360° \\ 4\, rad. = \alpha° \end{array}\right\} \quad \alpha = \frac{(4\, rad.)(360°)}{2\pi\, rad.} = 229.18°$$

$$z_5 = 11\angle 229.18° = 11(\cos 229.18° + i \cdot sen\, 229.18°) = -7.190 - 8.324i$$

$$\bar{z}_3 - z_5 = (0.548 - 1.912i) - (-7.190 - 8.324i) = 7.738 + 6.412i$$

$$\bar{z}_3 - z_5 = \sqrt{7.738^2 + 6.412^2}\angle tan^{-1}\left(\frac{6.412}{7.738}\right)°$$

$$= \sqrt{100.99}\angle tan^{-1}(0.828) = 10.049\angle 39.64°$$

$$\frac{z_1}{\bar{z}_3 - z_5} = \frac{8\angle 55°}{10.049\angle 39.64°} = 0.7965\angle 15.36°$$

$$\frac{z_1}{\bar{z}_3 - z_5} = 0.796(cos 15.36° + i \cdot sen 15.36°) = 0.767 - 0.210i$$

$$z_2 \cdot z_4 + \frac{z_1}{\bar{z}_3 - z_5} = (-7.680 - 53.300i) + (0.767 - 0.210i) = -6.913 - 53.510i$$

$$z_2 \cdot z_4 + \frac{z_1}{\bar{z}_3 - z_5}$$

$$= \sqrt{(-6.913)^2 + (-53.510)^2}\angle tan^{-1}\left(\frac{-53.510}{-6.913}\right)$$

$$= \sqrt{2{,}911.09}\angle tan^{-1}(7.741)$$

$= 53.954\angle 82.63°$, pero por estar en el tercer cuadrante hay que ajustar el argumento, por lo tanto:

$$z_2 \cdot z_4 + \frac{z_1}{\bar{z}_3 - z_5} = 53.954\angle(82.63° + 180°) = 53.954\angle 262.63°$$

$$\sqrt[3]{z_2 \cdot z_4 + \frac{z_1}{\bar{z}_3 - z_5}}$$

$$= \sqrt[3]{53.954}\left(cos\frac{262.63° + 360°k}{3} + i \cdot sen\frac{262.63° + 360°k}{3}\right)$$

$$k = 0: \quad z_I = 3.778(\cos 87.54° + i \cdot sen 87.54°)$$

$$k = 1: \quad z_{II} = 3.778(\cos 207.54° + i \cdot sen 207.54°)$$

$$k = 2: \quad z_{III} = 3.778(\cos 327.54° + i \cdot sen 327.54°)$$

Ejemplo.

Sean $z_1 = 9\angle 30°$, $z_2 = 3 + 5i$, $z_3 = (4, -6)$, $z_4 = 8\, cis 45°$, $z_5 = 2(\cos 25° + i \cdot sen\, 25°)$, encontrar z, en forma exponencial, para que se cumpla la siguiente igualdad: $\left(\frac{z_3 + z \cdot z_1}{\bar{z}_4}\right)^4 - 7z_2 = (z_5)^2$

Solución.

Despejando z:

$$z=\frac{\left(\sqrt[4]{(z_5)^2+7z_2}\right)\bar{z}_4-z_3}{z_1}$$

$$(z_5)^2=(2\angle 25°)^2=4\angle 50°=4(\cos 50°+i\cdot sen\, 50°)=2.571+3.064i$$

$$7z_2=7(3+5i)=21+35i$$

$$(z_5)^2+7z_2=(2.571+3.064i)+(21+35i)=23.571+38.064i$$

$$(z_5)^2+7z_2=\sqrt{23.571^2+38.064^2}\angle tan^{-1}\left(\frac{38.064}{23.571}\right)$$

$$=\sqrt{2{,}004.46}\angle tan^{-1}(1.614865725)=44.771\angle 58.23°$$

$$\sqrt[4]{(z_5)^2+7z_2}=\sqrt[4]{44.771}\left(\cos\frac{58.23°+360°k}{4}+i\cdot sen\frac{58.23°+360°k}{4}\right)$$

$k=0:\quad \sqrt[4]{(z_5)^2+7z_2}=2.586\,(cos14.55°+i\cdot sen14.55°)$ (sólo se toma la raíz principal)

$$\bar{z}_4=8\angle -45°$$

$$\left(\sqrt[4]{(z_5)^2+7z_2}\right)\bar{z}_4=(2.586\angle 14.55°)(8\angle -45°)$$

$$=20.688\angle -30.45°$$

$$=20.688(\cos(-30.45°)+i\cdot sen(-30.45°))=17.834-10.484i$$

$$\left(\sqrt[4]{(z_5)^2+7z_2}\right)\bar{z}_4-z_3=(17.834-10.484i)-(4-6i)=13.834-4.484i$$

$$=\sqrt{13.834^2+(-4.484)^2}\angle\tan^{-1}\left(\frac{-4.484}{13.834}\right)=\sqrt{211.48}\angle\tan^{-1}(-0.324)=14.542\angle -17.95°$$

$$z=\frac{\left(\sqrt[4]{(z_5)^2+7z_2}\right)\bar{z}_4-z_3}{z_1}=\frac{14.542\angle -17.95°}{9\angle 30°}$$

$$=1.615\angle -47.95=1.615\angle 312.05$$

Convirtiendo z a forma exponencial: $\left.\begin{array}{l}2\pi\ rad.=360°\\ \alpha\ rad.=312.05°\end{array}\right\}\quad \alpha=\frac{(2\pi\ rad.)(312.05°)}{360°}=5.446\ rad.$

$$\therefore\quad z=1.615e^{5.446i}$$

III.5 DEFINICIÓN DE POLINOMIO Y DE ECUACIÓN

Una *variable* es una cantidad que se simboliza por una literal y que puede tomar diferentes valores.

Una *constante* es una magnitud que presenta siempre un mismo valor.

Un *monomio* es una expresión del tipo: ax^n, donde a es un número real, x es la variable y n un número natural.

Existen monomios de más de una variable. Por ejemplo: $ax^n y^p z^q$ donde a es un coeficiente real, x,y,z son las variables y n,p,q son los exponentes naturales.

Un *binomio* es la expresión que se forma al sumar algebraicamente dos monomios. Por ejemplo: $4x+2y$

Un *trinomio* es la expresión que se forma al sumar algebraicamente tres monomios. Por ejemplo: $5x^3y^2+3z^4w^2-6ab^5$

Un *polinomio* es la suma algebraica de dos o más monomios. Si está en términos de la variable independiente x, se denota como una función $P(x)$ y en su forma general es una expresión de la forma:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+a_{n-4}x^{n-4}+\cdots+a_1x+a_o$$

El primer término del polinomio a_nx^n se conoce como el término dominante y al término a_0 se conoce como término independiente.

Una *ecuación* en x es un polinomio igualado a cero, cuyo grado es n, es decir, $P(x)=0$. Por ejemplo: $6x^3-4x^2+7x+10=0$

Una *raíz* es un valor que satisface la ecuación $P(x)=0$. Por su parte se llama *conjunto solución* de una ecuación algebraica al conjunto de todas las raíces de una ecuación.

Algoritmo de la división para polinomios

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con $Q(x)\neq 0$.

Si se efectúa la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$ entonces existen dos polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que cumplen con:

$$P(x)=Q(x)\cdot c(x)+r(x)$$

El polinomio $c(x)$ se llama *cociente* y $r(x)$ es el *residuo* de la división cuyo grado es menor que el de $P(x)$.

III.6 TEOREMAS NOTABLES

Teorema fundamental del álgebra

El teorema fundamental del álgebra[1] enunciado por Federico Gauss en 1799 establece que:

"Toda ecuación en x de grado n tiene n raíces complejas"

Esto significa que todo polinomio en x con coeficientes reales o complejos tiene por lo menos un factor de la forma $x-a$, donde a es un número complejo.

[1] Este teorema necesita de resultados de una rama de las Matemáticas superiores conocida como *funciones de variable compleja*, por lo que escapa de los alcances de este libro su demostración.

Teorema del residuo

Si se tiene un polinomio $P(x)$ y se divide entre $x-a$ el residuo de la división es $P(a)$.
Demostración:
Si se divide $P(x)$ entre $x-a$ se tiene:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R$$

donde $Q(x)$ es el cociente y R es el residuo.
Si ahora se evalúa $x=a$ se obtiene:

$$P(a)=Q(a)(a-a)+R=0+R=R$$

De donde $P(a)$ es el residuo.

Ejemplo.
Sea el polinomio: $P(x)=2x^3-5x^2+4x-9$, comprobar el teorema de residuo si se divide entre $x-1$.

Solución.
Dividiendo el polinomio entre $x-1$:

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-3x+1 \\ \hline
x-1 & 2x^3-5x^2+4x-9 \\
 & -2x^3+2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -3x^2+4x-9 \\
 & \quad 3x^2-3x \\ \cline{2-2}
 & \qquad x-9 \\
 & \qquad -x+1 \\ \cline{2-2}
 & \qquad -8
\end{array}$$

ahora, evaluando $x=1$:

$$P(1)=2(1)^3-5(1)^2+4(1)-9=2-5+4-9=-8$$

Los resultados son iguales, lo que comprueba el teorema del residuo.

Teorema del factor

En un polinomio $P(x)$, $x-a$ es un factor si y solo si a es una raíz de la ecuación $P(x)=0$.

Demostración:
Si $x-a$ es factor de $P(x)$ entonces se cumple que: $P(x)=Q(x)(x-a)$ porque $P(a)=Q(a)(a-a)=0$ por lo tanto, a es raíz de la ecuación $P(x)=0$.
Pero si a es raíz de la ecuación $P(x)=0$, esto implica que $P(a)=0$
Si se aplica el teorema del residuo se tiene que:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+P(a)=Q(x)(x-a)+0=Q(x)(x-a)$$

por lo tanto $x-a$ es factor de $P(x)$.

Ejemplo
Determinar si $x-3$ es factor del polinomio $P(x)=4x^3-2x^2-20x-30$

Solución:
Si $x=3$ es raíz, entonces debe cumplir que el residuo sea cero:
$P(3)=4(3)^3-2(3)^2-20(3)-30=108-18-60-30=0$
Por lo tanto, $x-3$ es factor del polinomio
Comprobando:

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^2+10x+10 \\ \hline
x-3 & 4x^3-2x^2-20x-30 \\
 & -4x^3+12x^2 \\ \hline
 & 10x^2-20x-30 \\
 & -10x^2+30x \\ \hline
 & 10x-30 \\
 & -10x+30 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Por lo tanto se cumple que: $4x^3-2x^2-20x-30=(4x^2+10x+10)(x-3)$.

Del teorema del factor se deduce que para todo polinomio de grado $n>0$ con coeficientes complejos se puede factorizar en n factores lineales complejos de la forma $x-a$.

III.7 NATURALEZA DE LAS RAÍCES DE POLINOMIOS

III.7.1 CLASIFICACIÓN DE LAS RAÍCES DE POLINOMIOS

Uno de los objetivos de factorizar un polinomio es el de encontrar sus raíces, es decir, los valores de la variable para los cuales el polinomio se hace cero. Esto significa que si $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n$ son raíces de $P(x)$, entonces se cumple que:

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)k$$

Donde k es una constante, por lo tanto, es imposible que $P(x)$ tenga más de n raíces.

En términos generales, las raíces de un polinomio $P(x)=0$ se pueden clasificar de la siguiente forma:

- Reales
  - Racionales (Son aquellas representadas en forma de cociente)
    - Positivas
    - Cero
    - Negativas
  - Irracionales (No se pueden representar en forma de cociente)
    - Positivas
    - Negativas
- Complejas
  - De la forma $z = a + bi \neq 0$

Ejemplos:

1) $3x - 7 = 0$

$x = \frac{7}{3}$ (raíz racional positiva)

2) $5x + 30 = 0$

$x = \frac{-30}{5} = -6$ (raíz racional negativa)

3) $9(x-2) + 5x - 10x + 3 + 6x + 15 = 0$

$9x - 18 + 5x - 10x + 3 + 6x + 15 = 0$

$x = \frac{0}{10} = 0$ (raíz racional igual a cero)

4) $2x^2 - 24 = 0$

$x^2 = \frac{24}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{12}$ (raíces irracionales, una positiva y otra negativa)

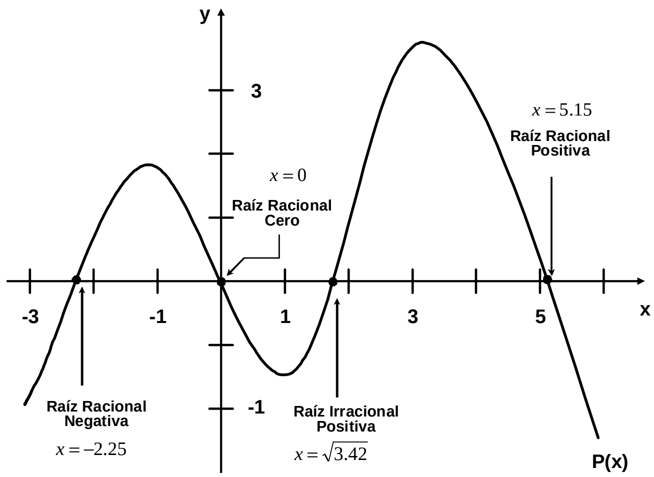
5) $3x^2 + 8x + 12 = 0$

$a = 3,\ b = 8,\ c = 12$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(3)(12)}}{2(3)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 144}}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{80}i}{6}$ (raíces complejas conjugadas)

Cada raíz real gráficamente representa una intersección de la función $P(x)$ con el eje de las abscisas.

Ejemplo.
La gráfica representa a un polinomio que posee cuatro raíces reales: tres racionales y una irracional:



Cuando se evalúan dos diferentes valores en $P(x)$ y los signos cambian entonces existe una raíz entre estos valores.

III.7.2 RAÍCES ENTERAS DE POLINOMIOS. DIVISIÓN SINTÉTICA

Para hallar las raíces enteras de un polinomio $P(x)$ de coeficientes enteros, basta con probar con cada uno de los divisores del término independiente.

Ejemplos.
Encontrar las raíces enteras de los siguientes polinomios:

1) $x^2 - 3x - 10 = 0$
Solución:
Los divisores del término independiente son: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$
Se evalúa cada uno hasta que se encuentre una raíz:
para $x = 1$: $1^2 - 3(1) - 10 = 1 - 3 - 10 = -12$
para $x = -1$: $(-1)^2 - 3(-1) - 10 = 1 + 3 - 10 = -6$
para $x = 2$: $2^2 - 3(2) - 10 = 4 - 6 - 10 = -12$
para $x = -2$: $(-2)^2 - 3(-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$
Como $x = -2$ es una raíz, entonces $x + 2$ lo divide:

$$\begin{array}{r|l} & x - 5 \\ \hline x+2 & x^2 - 3x - 10 \\ & -x^2 - 2x \\ \hline & -5x - 10 \\ & 5x + 10 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$ y las raíces son: $x_1=-2$ y $x_2=5$

2) $x^3-6x^2-13x+42=0$
Solución:
Los divisores del término independiente son: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm7, \pm14, \pm21, \pm42$
Se evalúa cada uno hasta que se encuentre una raíz:
para $x=1$: $1^3-6(1)^2-13(1)+42=1-6-13+42=24$
para $x=-1$: $(-1)^3-6(-1)^2-13(-1)+42=-1-6+13+42=48$
para $x=2$: $2^3-6(2)^2-13(2)+42=8-24-26+42=0$
Como $x=2$ es una raíz, entonces $x-2$ lo divide:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-4x-21 \\ \hline
x-2 & x^3-6x^2-13x+42 \\
 & \underline{-x^3+2x^2} \\
 & -4x^2-13x+42 \\
 & \underline{4x^2-8x} \\
 & -21x+42 \\
 & \underline{21x-42} \\
 & 0
\end{array}$$

Del polinomio restante, $x^2-4x-21=0$ se repite el proceso.
Los divisores del término independiente son: $\pm1, \pm3, \pm7, \pm21$
Se evalúa cada uno hasta que se encuentre una raíz:
para $x=1$: $1^2-4(1)-21=1-4-21=-24$
para $x=3$: $3^2-4(3)-21=9-12-21=-24$
para $x=7$: $7^2-4(7)-21=49-28-21=0$
Como $x=7$ es una raíz, entonces $x-7$ lo divide:

$$\begin{array}{r|l}
 & x+3 \\ \hline
x-7 & x^2-4x-21 \\
 & \underline{-x^2+7x} \\
 & 3x-21 \\
 & \underline{-3x+21} \\
 & 0
\end{array}$$

Por lo tanto, $x^3-6x^2-13x+42=(x-2)(x-7)(x+3)$ y las raíces son: $x_1=2$, $x_2=7$ y $x_3=-3$

3) $7x^4-2x^3+8x^2-9x+5=0$
Solución:
Los divisores del término independiente son: $\pm1, \pm5$
para $x=-1$: $7(-1)^4-2(-1)^3+8(-1)^2-9(-1)+5=7+2+8+9+5=31$
para $x=1$: $7(1)^4-2(1)^3+8(1)^2-9(1)+5=7-2+8-9+5=9$

para $x = -5$: $\quad 7(-5)^4 - 2(-5)^3 + 8(-5)^2 - 9(-5) + 5 = 4{,}375 + 250 + 200 + 45 + 5 = 4{,}875$

para $x = 5$: $\quad 7(5)^4 - 2(5)^3 + 8(5)^2 - 9(5) + 5 = 4{,}375 - 250 + 200 - 45 + 5 = 4{,}285$

Entonces $7x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 9x + 5$ no posee raíces enteras.

Existe un proceso alternativo al expuesto, conocido como *división sintética*. Este es un proceso que simplifica las operaciones y su metodología es la siguiente:

1. Acomodar de manera descendente los términos del polinomio
2. Escribir en una primera fila solo los coeficientes y rellenar con ceros los términos que no existan
3. Escribir fuera de la casilla el valor que se prueba como una factible raíz
4. Copiar el primer coeficiente en la tercera fila
5. Multiplicar el valor por el primer coeficiente y ubicarlo en la segunda fila
6. Hacer la suma con el correspondiente de la primera fila y ubicarlo en la tercera fila
7. Repetir sucesivamente los pasos 5 y 6 hasta encontrar un valor cuyo residuo sea cero.
8. Del polinomio reducido, efectuar el mismo procedimiento hasta que se llegue a un polinomio de grado dos, a fin de que se pueda factorizar o bien aplicar la ecuación de segundo grado.

Este proceso es a prueba y a error con los divisores, y su eficiencia depende de interpretar los residuos ya que entre más próximos estén del cero, más cerca se estará de encontrar la raíz.

Cotas superior e inferior de raíces de polinomios

En el proceso de obtener cada una de las raíces, los cálculos se simplifican considerablemente si se sabe que se localizan en un cierto intervalo $[a, b]$. Para todo fin práctico, se deben buscar los números a y b de forma que se garantice que todas las raíces del polinomio se encuentren en dicho intervalo. El número a es *una cota inferior* y el número b es *una cota superior* de las raíces del polinomio.

Las condiciones para que un número sea cota de las raíces de un polinomio son las siguientes:

Si al efectuar la división sintética de $P(x)$ entre $x - b$ y todos los coeficientes tanto del cociente como del residuo son positivos o cero, entonces b es una cota superior para las raíces.

Si al efectuar la división sintética de $P(x)$ entre $x - a$ y si los signos de los coeficientes tanto del cociente como del residuo presentan signos alternados (en este caso el cero se toma como si fuera positivo), entonces a es una cota inferior para las raíces.

Ejemplo.
Encontrar las raíces enteras de los siguientes polinomios:

1) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

Solución.
Los divisores del término independiente son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Probando con $x = -4$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -11 & 12 \\ -4 & & -4 & 24 & -52 \\ \hline & 1 & -6 & 13 & -40 \end{array}$$

Eso significa que no es raíz pero es cota inferior.
Probando con $x = 1$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -11 & 12 \\ 1 & & 1 & -1 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1 = 1$
Trabajando ahora con el polinomio reducido:
Probando con $x = 2$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -12 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -10 \end{array}$$

No es raíz ni cota.
Probando con $x = 4$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -12 \\ 4 & & 4 & 12 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

La segunda raíz es $x_2 = 4$
El polinomio reducido que queda es: $x + 3 = 0$
despejando se tiene la tercera raíz: $x_3 = -3$

2) $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 = 0$
Solución.
Los divisores del término independiente son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 15, \pm 30$
Probando con $x = -5$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & -15 & 19 & 30 \\ -5 & & -5 & 40 & -125 & 530 \\ \hline & 1 & -8 & 25 & -106 & 560 \end{array}$$

Eso significa que no es raíz pero es cota inferior.
Probando con $x = -1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & -15 & 19 & 30 \\ -1 & & -1 & 4 & 11 & -30 \\ \hline & 1 & -4 & -11 & 30 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1 = -1$
Trabajando con el polinomio reducido:
Probando con $x = 6$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & -11 & 30 \\ 6 & & 6 & 12 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 36 \end{array}$$

No es raíz pero es cota superior.
Probando con $x = 2$:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -4 & -11 & 30 \\ 2 & & 2 & -4 & -30 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 0 \end{array}$$

La segunda raíz es $x_2 = 2$

El polinomio reducido que queda es: $x^2 - 2x - 15 = 0$

Factorizando se tiene: $(x-5)(x+3) = 0$

Por lo tanto: $x_3 = 5$ y $x_4 = -3$

3) $x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 29x^2 + 2x + 24 = 0$

Solución.

Los divisores del término independiente son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

Probando con $x = -1$:

$$\begin{array}{c|rrrrrr} & 1 & 5 & -3 & -29 & 2 & 24 \\ -1 & & -1 & -4 & 7 & 22 & -24 \\ \hline & 1 & 4 & -7 & -22 & 24 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1 = -1$

Trabajando con el polinomio reducido:

Probando con $x = 1$:

$$\begin{array}{c|rrrrr} & 1 & 4 & -7 & -22 & 24 \\ 1 & & 1 & 5 & -2 & -24 \\ \hline & 1 & 5 & -2 & -24 & 0 \end{array}$$

La segunda raíz es $x_2 = 1$

Trabajando con el polinomio reducido:

Probando con $x = 2$:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & 5 & -2 & -24 \\ 2 & & 2 & 14 & 24 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & 0 \end{array}$$

La tercera raíz es $x_3 = 2$

El polinomio reducido que queda es: $x^2 + 7x + 12 = 0$

Factorizando se tiene: $(x+3)(x+4) = 0$

Por lo tanto: $x_4 = -3$ y $x_5 = -4$

III.7.3 RAÍCES RACIONALES DE POLINOMIOS

Si p son todos los factores del término independiente y q los factores del término dominante, entonces las posibles raíces de un polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros están dadas por alguno de los cocientes de la forma $\frac{p}{q}$.

Ejemplo.
Determinar las factibles raíces del polinomio $3x^3+2x^2+6x-12=0$

Solución.
Los divisores del término independiente son: $p=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\ \pm12$
Los divisores del coeficiente del término principal son: $q=\pm1,\pm3$
Las posibles raíces racionales son: $\frac{p}{q}=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\ \pm12,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3}$

Ejemplo.
Encontrar las raíces racionales del polinomio $24x^3-22x^2-5x+6=0$

Solución.
Los divisores del término independiente son: $p=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$
Los divisores del coeficiente del término principal son: $q=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\ \pm8,\pm12,\pm24$
Las posibles raíces racionales son:
$$\frac{p}{q}=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{3}{4},\pm\frac{1}{6},\pm\frac{1}{8},\pm\frac{3}{8},\pm\frac{1}{12},\pm\frac{1}{24}$$
Probando con $x=\frac{1}{2}$:
$$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{rrrr} 24 & -22 & -5 & 6 \\ & 12 & -5 & -5 \\ \hline 24 & -10 & -10 & 1 \end{array}\right.$$
No es raíz ni cota.
Probando con $x=-\frac{1}{2}$:
$$-\frac{1}{2}\left|\begin{array}{rrrr} 24 & -22 & -5 & 6 \\ & -12 & 17 & -6 \\ \hline 24 & -34 & 12 & 0 \end{array}\right.$$
La primera raíz es $x_1=-\frac{1}{2}$
Trabajando con el polinomio reducido:
Probando con $x=\frac{2}{3}$:
$$\frac{2}{3}\left|\begin{array}{rrr} 24 & -34 & 12 \\ & 16 & -12 \\ \hline 24 & -18 & 0 \end{array}\right.$$
La segunda raíz es $x_2=\frac{2}{3}$
El polinomio reducido que queda es: $24x-18=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{18}{24}$

Por lo tanto la tercera raíz: $x_3 = \frac{3}{4}$

Si un polinomio con coeficientes enteros cumple que tanto el coeficiente del término dominante, el término independiente y $P(1)$ son impares, entonces no posee raíces racionales.

Ejemplo.
Determinar si el polinomio $5x^3 + 3x^2 + 4x - 17 = 0$ tiene raíces racionales.

Solución:
$P(1) = 5(1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) - 17 = 5 + 3 + 4 - 17 = -5$
y como $a_3 = 5$ y $a_0 = -17$ entonces el polinomio no posee raíces racionales ya que los tres valores son impares.

Regla de los signos de Descartes

Si $P(x)$ es un polinomio expresado en forma descendente y con término independiente diferente de cero, entonces:

- El número de raíces positivas es igual al número de cambios de signos que tenga $P(x)$, o ese número disminuido en pares.
- El número de raíces negativas es igual al número de cambios de signos que tenga $P(-x)$, o ese número disminuido en pares.

Ejemplo.
Determinar el factible número de raíces positivas y negativas de los siguientes polinomios:

1) $P(x) = 6x^5 - 12x^4 + 7x^3 - x^2 - 2x - 11$
Solución.
El polinomio presenta tres cambios de signo, así que puede tener tres raíces positivas o sólo una.
$P(-x) = 6(-x)^5 - 12(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 - 2(-x) - 11 = -6x^5 - 12x^4 - 7x^3 - x^2 + 2x - 11$
el polinomio presenta dos cambios de signo, así que tiene dos raíces negativas o ninguna.

2) $P(x) = 2x^6 + 4x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 3x + 1$
Solución.
El polinomio presenta cuatro cambios de signo, así que puede tener cuatro, dos o cero raíces positivas.
$P(-x) = 2(-x)^6 + 4(-x)^5 - 5(-x)^4 + 8(-x)^3 - 2(-x)^2 + 3(-x) + 1$
$= 2x^6 - 4x^5 - 5x^4 - 8x^3 - 2x^2 - 3x + 1$
el polinomio presenta dos cambios de signo, así que tiene dos raíces negativas o ninguna.

3) $P(x) = 4 - 11x^5 + 13x^3$
Solución.
En primer lugar, el polinomio se ordena: $P(x) = -11x^5 + 13x^3 + 4$
El polinomio presenta un cambio de signo, así que sólo tiene una raíz positiva.
$P(-x) = -11(-x)^5 + 13(-x)^3 + 4 = 11x^5 - 13x^3 + 4$

el polinomio presenta dos cambios de signo, así que tiene dos raíces negativas o ninguna.
(nótese como para aplicar esta regla no se consideran los términos en x^4, x^2 y en x).

III.7.4 RAÍCES IRRACIONALES DE POLINOMIOS. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Por su misma naturaleza, no existe una forma de encontrar raíces irracionales exactas. Por ello, es necesario aplicar recursos numéricos a fin de encontrar las raíces de una función $P(x)$, es decir, aquellos puntos en los que $P(x)=0$.

Encontrar las raíces de un polinomio equivale a resolver la ecuación y obtener los valores de x que la cumplen. Para resolver esto, existen un conjunto de métodos que se denominan métodos cerrados[2]. Son métodos iterativos que se van aproximando a la solución y en los que se garantiza su convergencia (hallar la raíz del polinomio). Por su sencillez, el método más utilizado es el de *bisección*.

El método de bisección necesita una función $P(x)$ continua en un intervalo $[a,b]$ que cambie de signo en dicho intervalo. En ese caso, se cumple que $P(a)\cdot P(b)\leq 0$.

Los pasos que sigue este método (que puede aplicarse a cualquier raíz real) son tres:

1) Se busca un intervalo $[a,b]$ donde $P(x)$ sea continua y que cumpla con $P(a)\cdot P(b)\leq 0$
2) Se busca el punto medio del intervalo $c=\frac{a+b}{2}$ y se calcula el valor de la función en dicho punto $P(c)$
3) Si $P(a)\cdot P(c)\leq 0$, entonces el nuevo intervalo es $[c,b]$

De esta manera, el punto c se va aproximando a la solución. El método termina cuando se supera un error determinado. Cabe señalar que el intervalo inicial debe determinarse de forma que entre más pequeño sea, el número de cálculos será menor. Además, el error dependerá del grado de aproximación que se quiera tener. Para fines prácticos, cuando en las iteraciones se obtienen dos valores sucesivos con cuatro decimales iguales, entonces el error es despreciable.

Ejemplo.
Determinar de forma aproximada las raíces irracionales del polinomio $2x^2+3x-6=0$

Solución.
Evaluando $P(0)=2(0)^2+3(0)-6=0+0-6=-6$
Evaluando $P(2)=2(2)^2+3(2)-6=8+6-6=8$
Como tienen signos contrarios, la raíz se encuentra en el intervalo $[0,2]$
Bisectando el intervalo: $c=\frac{0+2}{2}=\frac{2}{2}=1$
Evaluando $P(1)=2(1)^2+3(1)-6=2+3-6=-1$
Como tiene signo negativo, la raíz se encuentra en el intervalo $[1,2]$
Bisectando el intervalo: $c=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1.5$

[2] Existen otros métodos más eficientes para encontrar las raíces numéricas de polinomios tales como el *Newton-Raphson* o el de *Gauss-Seidel*, sin embargo, por ser un libro de carácter introductorio, aquí sólo se abordará el método de bisección.

Evaluando $P(1.5)=2(1.5)^2+3(1.5)-6=4.5+4.5-6=3$

Como tiene signo positivo, la raíz se encuentra en el intervalo $[1,1.5]$

Repitiendo el proceso y elaborando una tabla se tiene:

c	$P(c)$	La raíz está en el intervalo:
1	-1	[1, 2]
1.5	3	[1, 1.5]
1.25	0.875	[1, 1.125]
1.125	-0.09375	[1.125, 1.25]
1.1875	0.3828125	[1.125, 1.1875]
1.15625	0.142578125	[1.125, 1.15625]
1.140625	0.023925781	[1.125, 1.140625]
1.1328125	-0.035034179	[1.1328125, 1.140625]
1.13671875	-0.0055847168	[1.13671875, 1.140625]
1.138671875	0.00916290284	[1.13671875, 1.138671875]
1.137695313	0.0017871883	[1.13671875, 1.137695313]
1.137207032	-0.00189923788	[1.137207032, 1.137695313]
1.137451173	-0.00005614022	[1.137451173, 1.137695313]
1.137573243	0.00086549538	[1.137573243, 1.137695313]
1.137634278	0.00132633496	[1.137634278, 1.137695313]
1.1376647955	0.00155676034	[1.1376647955, 1.137695313]

La aproximación es suficientemente aceptable con cuatro decimales, así que se puede concluir que $x_1\approx 1.1375$

Como es una ecuación de segundo grado, la otra raíz debe encontrarse de forma similar:

Evaluando $P(-3)=2(-3)^2+3(-3)-6=18-9-6=3$

Evaluando $P(-2)=2(-2)^2+3(-2)-6=8-6-6=-4$

Como tienen signos contrarios, la raíz se encuentra en el intervalo $[-3,-2]$

Bisectando el intervalo: $c=\frac{-3+(-2)}{2}=\frac{-5}{2}=-2.5$

Evaluando $P(-2.5)=2(-2.5)^2+3(-2.5)-6=12.5-7.5-6=-1$

Como tiene signo negativo, la raíz se encuentra en el intervalo $[-3,-2.5]$

Bisectando el intervalo: $c=\frac{-3+(-2.5)}{2}=\frac{-5.5}{2}=-2.75$

Evaluando $P(-2.75)=2(-2.75)^2+3(-2.75)-6=15.125-8.25-6=0.875$

Como tiene signo positivo, la raíz se encuentra en el intervalo $[-2.75,-2.5]$

Repitiendo el proceso y elaborando una tabla se tiene:

c	$P(c)$	La raíz está en el intervalo:
-2.5	-1	[-3, -2.5]
-2.75	0.875	[-2.75, -2.5]
-2.625	-0.09375	[-2.75, -2.625]
-2.6875	0.3828125	[-2.6875, -2.625]
-2.65625	0.142578125	[-2.65625, -2.625]
-2.640625	0.023925781	[-2.640625, -2.625]
-2.6328125	-0.035034179	[-2.640625, -2.6328125]
-2.63671875	-0.0055847168	[-2.640625, -2.63671875]
-2.638671875	0.0091629028	[-2.638671875, -2.63671875]
-2.637695313	0.0017871842	[-2.637695313, -2.63671875]
-2.637207032	-0.001899242	[-2.637695313, -2.637207032]
-2.637451173	-0.0000561444	[-2.637695313, -2.637451173]
-2.637573243	0.0008654954	[-2.637573243, -2.637451173]
-2.637512208	0.0004046707	[-2.637512208, -2.637451173]

La aproximación es suficientemente aceptable con cuatro decimales, así que se puede concluir que $x_2 \approx -2.6374$

Ejemplo.
Determinar de forma aproximada la raíz irracional del polinomio $x^3 + 4x + 9 = 0$

Solución.
Evaluando $P(0) = 0^3 + 4(0) + 9 = 0 + 0 + 9 = 9$
Evaluando $P(1) = 1^3 + 4(1) + 9 = 1 + 4 + 9 = 14$
No hay cambio de signo.
Evaluando $P(-1) = (-1)^3 + 4(-1) + 9 = -1 - 4 + 9 = 4$
Tampoco hay cambio de signo pero el resultado cada vez es menor.
Evaluando $P(-2) = (-2)^3 + 4(-2) + 9 = -8 - 8 + 9 = -7$

Como tienen signos contrarios, la raíz se encuentra en el intervalo $[-2, -1]$
Bisectando el intervalo: $c = \frac{-2 + (-1)}{2} = \frac{-3}{2} = -1.5$
Evaluando $P(-1.5) = (-1.5)^3 + 4(-1.5) + 9 = -3.375 - 6 + 9 = -0.375$
Como tiene signo negativo, la raíz se encuentra en el intervalo $[-1.5, -1]$
Bisectando el intervalo: $c = \frac{-1.5 + (-1)}{2} = \frac{-2.5}{2} = -1.25$
Evaluando $P(-1.25) = (-1.25)^3 + 4(-1.25) + 9 = -1.953125 - 5 + 9 = 2.046875$
Como tiene signo positivo, la raíz se encuentra en el intervalo $[-1.5, -1.25]$
Iterando y resumiendo en una tabla se tiene:

c	$P(c)$	La raíz está en el intervalo:
-1.5	-0.375	[-1.5, -1]
-1.25	2.046875	[-1.5, -1.25]
-1.375	0.900390625	[-1,5, -1.375]
-1.4375	0.279541015	[-1, 5, -1.4375]
-1.46875	-0.043426513	[-1.46875, -1.4375]
-1.453125	0.119121551	[-1.46875, -1.453125]
-1.4609375	0.038115024	[-1.46875, -1.4609375]
-1.46484375	-0.00258868932	[-1.46484375, -1.4609375]
-1.462890625	0.017779909	[-1.46484375, -1.462890625]
-1.463867188	0.00759979603	[-1.46484375, -1.463867188]
-1.464355469	0.00250659913	[-1.46484375, -1.464355469]
-1.46459961	-0.00004078521	[-1.46459961, -1.464355469]
-1.46447754	0.00123296561	[-1.46459961, -1.46447754]
-1.464538575	0.0005910496	[-1.46459961, -1.464538575]
-1.464559093	0.00031766035	[-1.46459961, -1.464559093]

La aproximación es suficientemente aceptable con cuatro decimales, así que se puede concluir que $x_1 \approx -1.4645$

III.7.5 RAÍCES COMPLEJAS DE POLINOMIOS

Si un polinomio $P(x) = 0$ tiene coeficientes reales y si $z = a + b \cdot i$ con $b \neq 0$ es una raíz compleja, entonces su conjugado $\bar{z} = a - b \cdot i$ también es una raíz. En general, las raíces complejas siempre se presentan en pares conjugados.

A fin de encontrar las raíces de un polinomio cuadrático de la forma $ax^2+bx+c=0$, se aplica la fórmula general para ecuaciones de segundo grado:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

y si el discriminante $D=b^2-4ac$ es negativo, las raíces son complejas.

Ejemplo.
Encontrar las raíces complejas del polinomio $3x^3+7x^2+80x+26=0$

Solución.
Los divisores del término independiente son: $p=\pm1,\pm2,\pm13,\pm26$
Los divisores del coeficiente del término principal son: $q=\pm1,\pm3$
Las posibles raíces racionales son:
$\frac{p}{q}=\pm1,\pm2,\pm13,\pm26,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{13}{3},\pm\frac{26}{3}$
Probando con $x=2$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 7 & 80 & 26 \\ 2 & & 6 & 26 & 212 \\ \hline & 3 & 13 & 106 & 238 \end{array}$$

No es raíz pero es cota superior.
Probando con $x=-\frac{1}{3}$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 7 & 80 & 26 \\ -\frac{1}{3} & & -1 & -2 & -26 \\ \hline & 3 & 6 & 78 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1=-\frac{1}{3}$
Trabajando con el polinomio reducido: $3x^2+6x+78=0$.
Como el discriminante $D=6^2-4(3)(78)=36-936=-900 \quad <0$, eso significa que las raíces son complejas.
Ahora, aplicando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(3)(78)}}{2(3)}=\frac{-6\pm\sqrt{36-936}}{6}=\frac{-6\pm\sqrt{-900}}{6}=\frac{-6\pm30i}{6}=-1\pm5i$$

La segunda raíz es $x_2=-1+5i$ y la tercera es su conjugado: $x_3=-1-5i$

Ejemplo.
Encontrar las raíces complejas del polinomio $4x^4+4x^3+x^2-18x-9=0$

Solución.
Los divisores del término independiente son: $p=\pm1,\pm3,\pm9$

Los divisores del coeficiente del término principal son: $q = \pm 1, \pm 2, \pm 4$

Las posibles raíces racionales son:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{9}{4}$$

Probando con $x = -3$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & 4 & 1 & -18 & -9 \\ -3 & & -12 & 24 & -75 & 279 \\ \hline & 4 & -8 & 25 & -93 & 270 \end{array}$$

No es raíz pero es cota inferior.

Probando con $x = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & 4 & 1 & -18 & -9 \\ -\frac{1}{2} & & -2 & -1 & 0 & 9 \\ \hline & 4 & 2 & 0 & -18 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1 = -\frac{1}{2}$

Trabajando con el polinomio reducido: $4x^3 + 2x^2 - 18 = 0$.

Probando con $x = \frac{3}{2}$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 2 & 0 & -18 \\ \frac{3}{2} & & 6 & 12 & 18 \\ \hline & 4 & 8 & 12 & 0 \end{array}$$

La segunda raíz es $x_2 = \frac{3}{2}$

Trabajando con el polinomio reducido: $4x^2 + 8x + 12 = 0$.

Como el discriminante $D = 8^2 - 4(4)(12) = 64 - 192 = -128 \quad < 0$, eso significa que las raíces son complejas.

Ahora, aplicando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(4)(12)}}{2(4)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 192}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{-128}}{8} = \frac{-8 \pm 8\sqrt{2}i}{8} = -1 \pm \sqrt{2}i$$

La tercera raíz es $x_3 = -1 + \sqrt{2}i$ y la cuarta es su conjugado: $x_4 = -1 - \sqrt{2}i$

Ejemplo.

Encontrar las raíces complejas del polinomio $x^4 + x^2 - 2 = 0$

Solución.

Haciendo: $z = x^2$ el polinomio se convierte en: $z^2 + z - 2 = 0$

Factorizando: $z^2 + z - 2 = (z - 1)(z + 2) = 0$

Las raíces en este caso son: $z_1 = 1$ y $z_2 = -2$

Para el primer valor se obtienen dos raíces:

$x = \pm\sqrt{z_1} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Para el segundo valor también se obtienen dos raíces:

$x = \pm\sqrt{z_2} = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$

Por lo tanto: $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \sqrt{2}i, \quad x_4 = -\sqrt{2}i$

III.8 EJEMPLOS DE CÁLCULO DE RAÍCES DE POLINOMIOS

Ejemplos
Aplicando toda la teoría expuesta, encontrar las raíces de los siguientes polinomios:

1) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$
Solución.
Aplicando la regla de Descartes se tiene:
$P(x)$ tiene tres cambios de signo
$P(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 + 4(-x) - 4 = -x^3 - x^2 - 4x - 4$ no presenta cambio de signos, así que no tiene raíces negativas.
Por lo tanto el polinomio tiene tres raíces positivas o bien una positiva y dos complejas:

Positivas	Negativas	Complejas	Total
3	0	0	3
1	0	2	3

Los divisores del término independiente son: $p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$

Los divisores del coeficiente del término principal son: $q = \pm 1$

Las posibles raíces enteras son:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

Probando con $x = 1$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1 = 1$

Trabajando con el polinomio reducido: $x^2 + 4 = 0$.

Como la ecuación de segundo grado no es completa, no es necesario aplicar la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, basta con despejar: $x^2 = -4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

La segunda raíz es $x_2 = 2i$ y la tercera es su conjugado: $x_3 = -2i$

2) $8x^4 - 49x^3 + 87x^2 - x - 105 = 0$
Solución.
Aplicando la regla de Descartes se tiene:
$P(x)$ tiene tres cambios de signo
$P(-x) = 8(-x)^4 - 49(-x)^3 + 87(-x)^2 - (-x) - 105 = 8x^4 + 49x^3 + 87x^2 + x - 105$
presenta un cambio de signo, así que tiene una raíz negativa.

Por lo tanto, las raíces del polinomio poseen las siguientes posibilidades:

Positivas	Negativas	Complejas	Total
3	1	0	4
1	1	2	4

Los divisores del término independiente son: $p=\pm1,\pm3,\pm5,\pm7,\pm15,\pm21,\pm35,\pm105$
Los divisores del coeficiente del término principal son: $q=\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,$

Las posibles raíces racionales son $\frac{p}{q}$, que en este caso son bastantes, así que conviene encontrar cotas:

Probando con $x=-1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 8 & -49 & 87 & -1 & -105 \\ -1 & & -8 & 57 & -144 & 145 \\ \hline & 8 & -57 & 144 & -145 & 40 \end{array}$$

No es raíz pero es cota inferior.

Probando con un valor cercano: $x=-\frac{7}{8}$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 8 & -49 & 87 & -1 & -105 \\ -\frac{7}{8} & & -7 & 49 & -119 & 105 \\ \hline & 8 & -56 & 136 & -120 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1=-\frac{7}{8}$

Trabajando con el polinomio reducido: $8x^3-56x^2+136-120=0$.

Probando con $x=3$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & -56 & 136 & -120 \\ 3 & & 24 & -96 & 120 \\ \hline & 8 & -32 & 40 & 0 \end{array}$$

La segunda raíz es $x_2=3$

Trabajando con el polinomio reducido: $8x^2-32x+40=0$.

Como el discriminante $D=(-32)^2-4(8)(40)=1024-1280=-256 \quad <0$, eso significa que las raíces son complejas.

Ahora, aplicando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado:

$$x=\frac{-(-32)\pm\sqrt{(-32)^2-4(8)(40)}}{2(8)}=\frac{32\pm\sqrt{1024-1280}}{16}=\frac{32\pm\sqrt{-256}}{16}=\frac{32\pm16i}{16}=2\pm i$$

La tercera raíz es $x_3=2+i$ y la cuarta es su conjugado: $x_4=2-i$

3) $3x^5+x^4+72x^3+24x^2-75x-25=0$

Solución.

Aplicando la regla de Descartes se tiene:

$P(x)$ tiene un cambio de signo

$$P(-x)=3(-x)^5+(-x)^4+72(-x)^3+24(-x)^2-75(-x)-25=-3x^5+x^4-72x^3+24x^2+75x-25$$

presenta cuatro cambios de signo, así que tiene cuatro, dos o cero raíces negativas.
Por lo tanto, las raíces del polinomio tiene las siguientes posibilidades:

Positivas	Negativas	Complejas	Total
1	4	0	5
1	2	2	5
1	0	4	5

Los divisores del término independiente son: $p=\pm 1,\pm 5,\pm 25$

Los divisores del coeficiente del término principal son: $q=\pm 1,\pm 3$

Las posibles raíces racionales son:

$$\frac{p}{q}=\pm 1,\pm 5,\pm 25,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{5}{3},\pm\frac{25}{3}$$

Probando con $x=-1$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & 1 & 72 & 24 & -75 & -25 \\ -1 & & -3 & 2 & -74 & 50 & 25 \\ \hline & 3 & -2 & 74 & -50 & -25 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1=-1$

Probando con $x=1$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -2 & 74 & -50 & -25 \\ 1 & & 3 & 1 & 75 & 25 \\ \hline & 3 & 1 & 75 & 25 & 0 \end{array}$$

La segunda raíz es $x_2=1$

Trabajando con el polinomio reducido: $3x^3+x^2+75x+25=0$.

Probando con $x=\frac{1}{3}$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 1 & 75 & 25 \\ \frac{1}{3} & & 1 & \frac{2}{3} & \frac{227}{9} \\ \hline & 3 & 2 & \frac{227}{3} & \frac{452}{9} \end{array}$$

No es raíz pero es cota superior.

Probando con $x=-\frac{1}{3}$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 1 & 75 & 25 \\ -\frac{1}{3} & & -1 & 0 & -25 \\ \hline & 3 & 0 & 75 & 0 \end{array}$$

La tercera raíz es $x_3=-\frac{1}{3}$

Trabajando con el polinomio reducido: $3x^2+75=0$.

Como la ecuación de segundo grado no es completa, no es necesario aplicar la fórmula general para la ecuación de segundo grado, basta con despejar:

$$3x^2 = -75 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{75}{3} = -25 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$$

La cuarta raíz es $x_4 = 5i$ y la quinta es su conjugado: $x_5 = -5i$

III.9 INTERVALOS DE NÚMEROS REALES

Una *desigualdad* es la expresión de dos cantidades tales que una es mayor que otra. Las desigualdades en general se clasifican en absolutas y condicionales.

Las desigualdades *absolutas* son aquellas que se cumplen sea cual sea el valor real que se sustituye. Por ejemplo: $x+1>x$.

Las desigualdades *condicionales* son aquellas que sólo se cumplen para ciertos valores de las variables. Por ejemplo $2x-6>0$ sólo se cumple para valores de x mayores de 3. A este tipo de desigualdades se les denomina *inecuaciones*.

A diferencia de las ecuaciones, que sólo se verifican para algunos valores de la variable, las inecuaciones tienen infinitas soluciones.

Un *intervalo* describe un rango entre dos valores pertenecientes a los números reales tales que $a>b$, es decir, es un segmento limitado de la recta numérica.

Por su contenido, los intervalos se clasifican en cuatro tipos:

1. *Cerrados*

Son aquellos intervalos que si tocan a sus extremos. Se definen como: $[a,b]=\{ x\in R \mid a\le x\le b \}$

2. *Abiertos*

Son aquellos intervalos que no tocan a sus extremos. Se definen como: $(a,b)=\{ x\in R \mid a< x< b \}$

3. *Semiabiertos*

Por la izquierda: son aquellos intervalos que incluyen a su extremo superior: $(a,b]=\{ x\in R \mid a< x\le b \}$

Por la derecha: son aquellos intervalos que incluyen a su extremo inferior: $[a,b)=\{ x\in R \mid a\le x< b \}$

4. *Infinitos*

Cerrados a la izquierda: $[a,\infty)=\{ x\in R \mid a\le x \}$

Cerrados a la derecha: $(-\infty,b]=\{ x\in R \mid x\le b \}$

Abiertos a la izquierda: $(a,\infty)=\{ x\in R \mid a< x \}$

Abiertos a la derecha: $(-\infty, b) = \{\, x \mid x < b \,\}$

Abierto completamente: es aquel que contiene a todos los números reales: $(-\infty, \infty) = \{\, x \mid -\infty < x < \infty \,\}$

III.10 PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

1. Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta un mismo número real la desigualdad se mantiene. Esto es: sea n un número cualquiera, si $a > b \quad \Rightarrow \quad a+n > b+n$

Ejemplo.
Se sabe que: $7 > 5$
$n = 3$
$7+3 > 5+3 \quad \Rightarrow \quad 10 > 8$

2. Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un mismo número n positivo la desigualdad se mantiene.

Ejemplos.
a) Se sabe que: $4 > 3$
$n = 2$
$4(2) > 3(2) \quad \Rightarrow \quad 8 > 6$
b) Se sabe que: $32 > 24$
$n = 8$
$\frac{32}{8} > \frac{24}{8} \quad \Rightarrow \quad 4 > 3$

3. Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un mismo número n negativo la desigualdad *cambia de sentido*.

Ejemplos.
a) Se sabe que: $9 > 5$
$n = -1$
$9(-1) < 5(-1) \quad \Rightarrow \quad -9 < -5$
b) Se sabe que: $48 > 30$
$n = -6$
$\frac{48}{-6} < \frac{30}{-6} \quad \Rightarrow \quad -8 < -5$

III.11 RESOLUCIÓN DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA VARIABLE

Las inecuaciones de primer grado en x son de la forma $ax+b > 0$, $ax+b < 0$. Es decir, son las que tienen la incógnita con exponente uno.

El objetivo es despejar x, respetando las normas de las propiedades con desigualdades. En este sentido, la metodología para resolver inecuaciones de primer grado es similar a la de resolver ecuaciones de primer grado, sin embargo, presenta una salvedad:

1. Se suprimen los paréntesis (si los hay)
2. Se quitan denominadores (si los hay)
3. Se aplican los inversos aditivos correspondientes a cada uno de los sumandos. En la práctica, esto significa pasar términos de un miembro a otro cambiando los signos (si está sumando pasa restando y si está restando pasa sumando).
4. Se aplican los inversos multiplicativos positivos correspondientes cuando sea necesario. En la práctica, esto significa pasar factores o denominadores positivos de un miembro a otro (si está multiplicando pasa dividiendo y si está dividiendo pasa multiplicando).
5. Se invierte el sentido de la desigualdad cuando se aplican los inversos multiplicativos negativos correspondientes. Esto significa que si un coeficiente negativo está multiplicando y se pasa dividiendo o si está dividiendo se pasa multiplicando, el sentido de la desigualdad cambia. Este es el paso diferente a las ecuaciones.

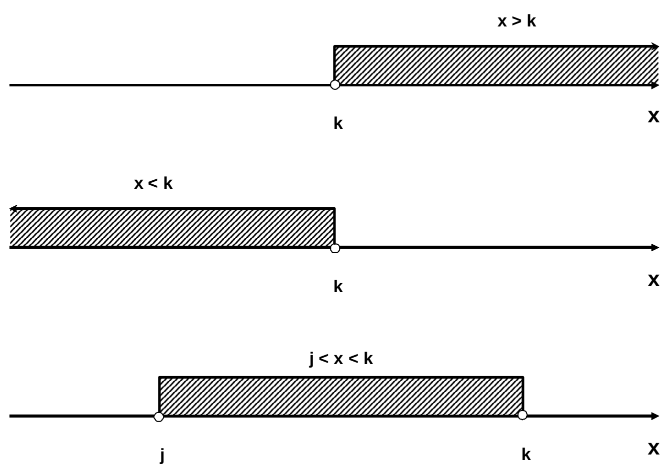
La interpretación gráfica de la solución de una inecuación de primer grado en x es un intervalo en la recta numérica que se comporta de acuerdo a lo siguiente:

Si $x > k$ implica que es el intervalo (k, ∞), es decir, son todos los números reales ubicados a la derecha de k

Si $x < k$ implica que es el intervalo $(-\infty, k)$, es decir, son todos los números reales ubicados a la izquierda de k

Si $j < x < k$ implica que es el intervalo (j, k), es decir, son todos los números reales que están entre j y k.

Gráficamente:



Ejemplos.
Resolver las siguientes inecuaciones de primer grado:

1) $5x + 8 - 3x < 13 - 2x + 7$

Solución.

$$5x - 3x + 2x < 13 + 7 - 8$$
$$4x < 12$$
$$x < \frac{12}{4} \quad \Rightarrow \quad x < 3$$

2) $4(x-3)-6x>10-2(-5x-9)$

Solución.

$$4x-12-6x>10+10x+18$$
$$4x-6x-10x>10+18+12$$
$$-12x>40$$
$$x<\frac{40}{-12}$$
$$x<-\frac{10}{3}$$

3) $\frac{3}{2}+5x>\frac{4}{3}x+8-\frac{5}{4}$

Solución.

Multiplicando por 12:

$$12\left(\frac{3}{2}+5x\right)>12\left(\frac{4}{3}x+8-\frac{5}{4}\right)$$
$$18+60x>16x+96-15$$
$$60x-16x>96-15-18$$
$$44x>63$$
$$x>\frac{63}{44}$$

4) $\frac{5x-3}{x-2}>4$

Solución.

Caso 1:

Si el denominador es positivo la desigualdad no cambia, esto es, si $x-2>0$:

$$5x-3>4(x-2)$$
$$5x-3>4x-8$$
$$5x-4x>-8+3$$
$$x>-5$$

pero $x-2>0 \quad \Rightarrow \quad x>2$

dadas las dos restricciones, la solución para este caso es: $x>2$

Caso 2:

Si el denominador es negativo la desigualdad si cambia, esto es, si $x-2<0$:

$$5x-3<4x-8$$
$$5x-4x<-8+3$$
$$x<-5$$

pero $x-2<0 \quad \Rightarrow \quad x<2$

dadas las dos restricciones, la solución para este caso es: $x<-5$

Considerando ambos resultados, el conjunto solución es: $(-\infty,-5)\cup(2,\infty)$

5) $|6x-11|<5$

Solución.

Sabiendo que: $|x|<k \quad \Rightarrow \quad -k<x<k$:

$$-5<6x-11<5$$
$$-5+11<6x<5+11$$
$$6<6x<16$$
$$\frac{6}{6}<x<\frac{16}{6}$$
$$1<x<\frac{8}{3}$$

6) $|2-5x|>7$

Solución.

Sabiendo que: $|x|>k \quad \Rightarrow \quad k<x; \quad x<-k$

$$7<2-5x; \quad 2-5x<-7$$
$$7-2<-5x; \quad -5x<-7-2$$
$$5<-5x; \quad -5x<-9$$
$$\frac{5}{-5}>x; \quad x>\frac{-9}{-5}$$
$$-1>x; \quad x>\frac{9}{5}$$

7) $|8x-1|<|x-9|$

Solución.

Considerando la ecuación:

$$|8x-1|=|x-9|$$

Los valores absolutos de dos números son iguales si dichos números son iguales o son opuestos en signo, por lo tanto, se cumple que:

$8x-1=x-9$ y $8x-1=-(x-9)$

resolviendo la primera ecuación: $8x-1=x-9$

$$8x-x=-9+1$$
$$7x=-8$$
$$x=-\frac{8}{7}$$

resolviendo la segunda ecuación: $8x-1=-(x-9)$

$$8x-1=-x+9$$
$$8x+x=9+1$$
$$9x=10$$
$$x=\frac{10}{9}$$

Los puntos encontrados dividen la recta en tres intervalos: $\left(-\infty,-\frac{8}{7}\right),\left(-\frac{8}{7},\frac{10}{9}\right),\left(\frac{10}{9},\infty\right)$.

Probando con valores intermedios a fin de saber cuáles cumplen con la desigualdad:

$-2\in\left(-\infty,-\frac{8}{7}\right)$

$|8(-2)-1|=17$

$|(-2)-9|=|-11|=11$

como 17 no es menor que 11 no se satisface la desigualdad original en ningún punto de ese intervalo.

$0\in\left(-\frac{8}{7},\frac{10}{9}\right)$

$|8(0)-1|=1$

$|0-9|=9$

como 1 si es menor que 9 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.

$2\in\left(\frac{10}{9},\infty\right)$

$|8(2)-1|=15$

$|2-9|=7$

como 15 no es menor que 7 no se satisface la desigualdad original en ningún punto de ese intervalo.

Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo $\left(-\frac{8}{7},\frac{10}{9}\right)$, es decir, $-\frac{8}{7}<x<\frac{10}{9}$.

III.12 RESOLUCIÓN DE INECUACIONES SIMULTÁNEAS DE PRIMER GRADO CON UNA VARIABLE

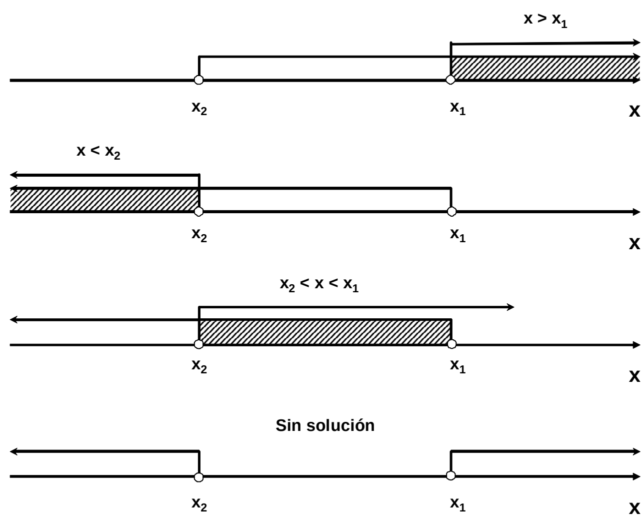
Las inecuaciones simultáneas son aquellos sistemas de desigualdades que se satisfacen con los mismos valores.

Para encontrar el conjunto solución de inecuaciones simultáneas se resuelve una a la vez, se analizan cada uno de sus resultados y se obtienen los valores que verifican a todas las desigualdades.

En general, x_1 y x_2 son las dos restricciones de cada una de las inecuaciones simultáneas y si $x_1>x_2$, existen cuatro posibilidades:

- Si $x>x_1$ y $x_1>x_2$, la solución es $x>x_1$.
- Si $x<x_2$ y $x_2<x_1$, la solución es $x<x_2$.
- Si $x<x_1$ y $x>x_2$, la solución es $x_2<x<x_1$.
- Si $x<x_2$ y $x>x_1$, no hay solución.

Gráficamente:



Ejemplos.
Resolver las siguientes inecuaciones simultáneas.

1) $\left.\begin{array}{l} 5x-4>12-3x \\ 7x+9>34+2x \end{array}\right\}$

Solución.
Resolviendo la primera inecuación:

$5x+3x>12+4$

$8x>16$

$x>\frac{16}{8}$

$x>2$

Resolviendo la segunda inecuación:

$7x+9>34+2x$

$5x>25$

$x>\frac{25}{5}$

$x>5$

Como las dos restricciones son “mayores que”, se toma el más grande, por lo tanto, la solución es: $x>5$

2) $\left.\begin{array}{l} 11x-23<-3+6x \\ -5x+4>-8-x \end{array}\right\}$

Solución.
Resolviendo la primera inecuación:

$11x-6x<-3+23$

$5x<20$

$x<\frac{20}{5}$

$x<4$

Resolviendo la segunda inecuación:

$-5x+x>-8-4$

$-4x>-12$

$x<\frac{-12}{-4}$

$x<3$

Como las dos restricciones son "menores que", se toma el más pequeño, por lo tanto, la solución es: $x<3$

3) $\left.\begin{matrix} -11x+8x+4<7 \\ -4x-7<9-9x+2+2x \end{matrix}\right\}$

Solución.

Resolviendo la primera inecuación:

$-11x+8x<7-4$

$-3x<3$

$x>\frac{3}{-3}$

$x>-1$

Resolviendo la segunda inecuación:

$-4x+9x-2x<9+2+7$

$3x<18$

$x<\frac{18}{3}$

$x<6$

Como una las dos restricciones es "mayor que", la otra es "menor que" y se intersectan, entonces, la solución es $-1<x<6$.

4) $\left.\begin{matrix} 8x+6>15+2x+3 \\ -2x-8>-11-4+5x \end{matrix}\right\}$

Solución.

Resolviendo la primera inecuación:

$8x-2x>15+3-6$

$6x>12$

$x>\frac{12}{6}$

$x>2$

Resolviendo la segunda inecuación:

$-2x-5x>-11-4+8$

$-7x>-7$

$x<\frac{-7}{-7}$

$x<1$

Como una de las restricciones es "mayor que", la otra es "menor que", pero no se intersectan, entonces no existe solución.

III.13 RESOLUCIÓN DE INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA VARIABLE

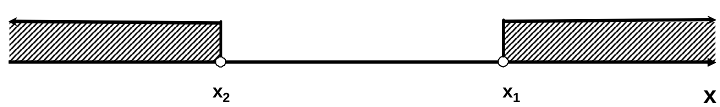
Las desigualdades de segundo grado o cuadráticas son del tipo $ax^2+bx+c>0$ o bien del tipo $ax^2+bx+c<0$.

El objeto de su resolución es encontrar los intervalos que satisfacen la inecuación, teniendo en cuenta lo siguiente:

- Cuando se presenta en la forma $ax^2+bx+c>0$, el resultado es un intervalo dado por $x_1<x$, $x<x_2$, donde x_1 es la raíz más grande y x_2 la más pequeña.
- Cuando se presenta en la forma $ax^2+bx+c<0$, el resultado es un intervalo dado por $x_2<x<x_1$, donde x_1 es la raíz más grande y x_2 la más pequeña.
- Si el discriminante $D=b^2-4ac<0$ entonces la inecuación no tiene solución.

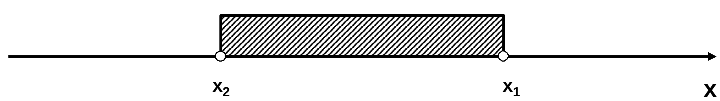
Gráficamente:

$ax^2+bx+c>0$



$x_1 < x$, $x < x_2$

$ax^2+bx+c<0$



$x_2 < x < x_1$

Ejemplos.
Obtener los valores de x para los cuales se cumplen las siguientes inecuaciones cuadráticas:

1) $x^2-25>0$
Solución.
Considerando la ecuación: $x^2-25=0$

$$x^2=25 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$$

$$x_1=5$$

$$x_2=-5$$

el conjunto solución es: $5 < x$, $x < -5$

2) $2x^2 - 6x < 0$

Solución.
Considerando la ecuación: $2x^2 - 6x = 0$
factorizando:
$x(2x-6)=0$
$x_1 = 0$
$2x - 6 = 0$
$2x = 6$
$x = \frac{6}{2}$
$x_2 = 3$
el conjunto solución es: $0 < x < 3$

3) $x^2 + 4x - 9 > 0$

Solución.
$a = 1,\ b = 4,\ c = -9$
Aplicando la fórmula general:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+36}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{2} \approx \frac{-4 \pm 7.211}{2} \quad \Rightarrow$$

$$x_1 \approx \frac{-4+7.211}{2} \approx \frac{3.211}{2} \approx 1.605; \qquad x_2 \approx \frac{-4-7.211}{2} \approx \frac{-11.211}{2} \approx -5.605$$

el conjunto solución aproximado es: $1.605 < x$, $x < -5.605$

4) $2x^2 + 5x - 8 < 0$

Solución.
$a = 2,\ b = 5,\ c = -8$
Aplicando la fórmula general:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-8)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+64}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{89}}{4} \approx \frac{-4 \pm 9.433}{4} \quad \Rightarrow$$

$$x_1 \approx \frac{-5+9.433}{4} = \frac{4.433}{4} \approx 1.108; \qquad x_2 \approx \frac{-5-9.433}{4} = \frac{-14.433}{4} \approx -3.608$$

el conjunto solución aproximadamente es: $-3.608 < x < 1.108$

También se pueden resolver por factorización, obteniendo la solución de cada factor, calculando posteriormente la intersección de las soluciones.

5) $x^2 - x - 6 > 0$
Solución.
Resolviendo por factorización al considerar la ecuación:
$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2)=0$
$x_1=3$
$x_2=-2$
el conjunto solución es: $3<x$, $x<-2$

6) $4x^2-3x+10>0$

Solución.
$a=4, b=-3, c=10$
Aplicando la fórmula general:

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(4)(10)}}{2(4)}=\frac{3\pm\sqrt{9-160}}{8}=\frac{3\pm\sqrt{-151}}{8} \quad \Rightarrow$$

no existe solución.

7) $\left|x^2-2x\right|<\frac{3}{4}$

Solución.
Sabiendo que: $|x|<k \quad \Rightarrow \quad -k<x<k$:

$$-\frac{3}{4}<x^2-2x<\frac{3}{4}$$

esto es un sistema de dos desigualdades cuadráticas, que se puede escribir como:

$$\left.\begin{array}{l} x^2-2x-\frac{3}{4}<0 \\ x^2-2x+\frac{3}{4}>0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo la primera inecuación:
$a=1, b=-2, c=-\frac{3}{4}$
Aplicando la fórmula general:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)\left(-\frac{3}{4}\right)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{4+3}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{2}\approx\frac{2\pm2.645}{2}$$

$x_1\approx2.322; \qquad x_2\approx-0.322$
el conjunto solución S_1 aproximado es: $-0.322<x<2.322$
Resolviendo la segunda inecuación:
$a=1, b=-2, c=\frac{3}{4}$
Aplicando la fórmula general:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)\left(\frac{3}{4}\right)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{2\pm1}{2}$$

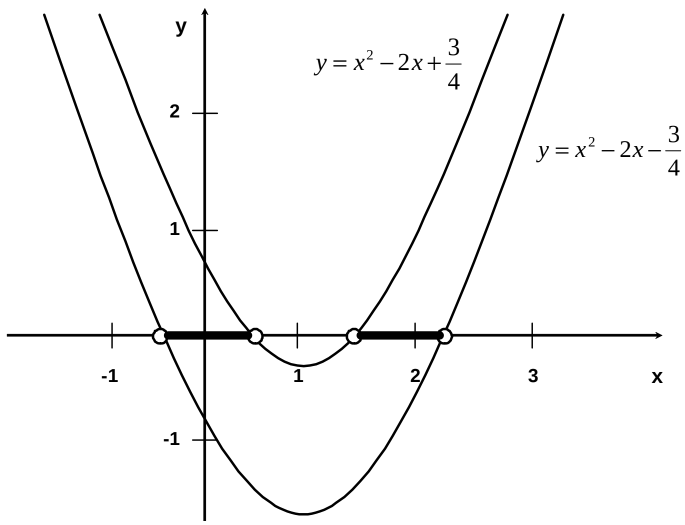
$x_1 = 1.5; \qquad x_2 = 0.5$

el conjunto solución S_2 es: $1.5 < x$, $x < 0.5$

Finalmente, al ser inecuaciones simultáneas, el conjunto solución del sistema es la intersección de ambas soluciones: $S = S_1 \cap S_2$

$$S = (-0.322, 2.322) \cap [(-\infty, 0.5) \cup (1.5, \infty)] \quad \Rightarrow \quad S = (-0.322, 0.5) \cup (1.5, 2.322)$$

gráficamente esto es:



III.14 DESIGUALDADES DE COCIENTE DE POLINOMIOS

Sean dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. Si se tiene una desigualdad de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ o bien $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, la solución puede encontrarse mediante la siguiente metodología:

1) Se ordenan de forma tal que el segundo miembro sea cero
2) Se factorizan ambos polinomios
3) Se encuentran las raíces de ambos polinomios.
4) Conocido el número de raíces n, se forman los $n+1$ intervalos correspondientes
5) Se prueba con valores intermedios de cada uno de los intervalos a fin de saber si satisface la inecuación original
6) Se obtiene la unión de los intervalos que satisfacen la inecuación.

Ejemplos.

Obtener la solución de las siguientes inecuaciones:

1) $\frac{x^2 - x - 6}{x - 1} > 0$

Solución.

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x-1} > 0$$

Las raíces son:

$x_1 = 3$
$x_2 = -2$
$x_3 = 1$

Los puntos encontrados dividen la recta en cuatro intervalos: $(-\infty,-2), (-2,1), (1,3), (3,\infty)$.
Probando con valores intermedios a fin de saber cuáles cumplen con la desigualdad:

$-4 \in (-\infty,-2)$

$$\frac{(-4)^2-(-4)-6}{(-4)-1} = \frac{16+4-6}{-5} = -\frac{14}{5}$$

como $-\frac{14}{5}$ no es mayor que 0 no se satisface la desigualdad original en ningún punto de ese intervalo.

$0 \in (-2,1)$

$$\frac{0^2-(0)-6}{(0)-1} = \frac{-6}{-1} = 6$$

como 6 si es mayor que 0 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.

$2 \in (1,3)$

$$\frac{2^2-2-6}{2-1} = \frac{4-2-6}{1} = -4$$

como -4 no es mayor que 0 no se satisface la desigualdad original en ningún punto de ese intervalo.

$4 \in (3,\infty)$

$$\frac{4^2-4-6}{4-1} = \frac{16-4-6}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

como 2 si es mayor que 0 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.
Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de los intervalos que cumplen la desigualdad: $(-2,1)\cup(3,\infty)$

2) $\frac{x-1}{x-3} < 2$

Solución.

$$\frac{x-1}{x-3} - 2 < 0$$

$$\frac{x-1-2(x-3)}{x-3} < 0$$

$$\frac{x-1-2x+6}{x-3} < 0$$

$$\frac{-x+5}{x-3} < 0$$

$$\frac{x-5}{x-3} > 0$$

Las raíces son:

$x_1 = 5$
$x_2 = 3$

Los puntos encontrados dividen la recta en tres intervalos: $(-\infty,3)$, $(3,5)$, $(5,\infty)$.
Probando con valores intermedios a fin de saber cuáles cumplen con la desigualdad:

$0\in(-\infty,3)$

$$\frac{0-1}{0-3}=\frac{1}{3}$$

como $\frac{1}{3}$ si es menor que 2 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.

$4\in(3,5)$

$$\frac{4-1}{4-3}=\frac{3}{1}=3$$

como 3 no es menor que 2 no se satisface la desigualdad original para ningún punto de ese intervalo.

$6\in(5,\infty)$

$$\frac{6-1}{6-3}=\frac{5}{3}$$

como $\frac{5}{3}$ si es menor que 2 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.

Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de los intervalos que cumplen la desigualdad: $(-\infty,3)\cup(5,\infty)$

3) $\frac{x^2-x}{x^2+2x}<0$

Solución.

$$\frac{x(x-1)}{x(x+2)}<0$$

Las raíces son:

$x_1=0$

$x_2=1$

$x_3=-2$

Los puntos encontrados dividen la recta en cuatro intervalos: $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$.
Probando con valores intermedios a fin de saber cuáles cumplen con la desigualdad:

$-3\in(-\infty,-2)$

$$\frac{(-3)^2-(-3)}{(-3)^2+2(-3)}=\frac{9+3}{9-6}=\frac{12}{3}=4$$

como 4 no es menor que 0 no se satisface la desigualdad original en ningún punto de ese intervalo.

$-1\in(-2,0)$

$$\frac{(-1)^2-(-1)}{(-1)^2+2(-1)}=\frac{1+1}{1-2}=\frac{2}{-1}=-2$$

como -2 si es menor que 0 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.

$0.5\in(0,1)$

$$\frac{(0.5)^2-(0.5)}{(0.5)^2+2(0.5)}=\frac{0.25-0.5}{0.25+1}=\frac{-0.25}{1.25}=-0.2$$

como -0.2 si es menor que 0 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.
$2\in(1,\infty)$

$$\frac{2^2-2}{2^2+2(2)}=\frac{4-2}{4+4}=\frac{2}{8}=0.25$$

como 0.25 no es menor que 0 no se satisface la desigualdad original en ningún punto de ese intervalo.
Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de los intervalos que cumplen la desigualdad: $(-2,0)\cup(0,1)$

4) $\frac{x-2}{x^2-3x-10}>0$

Solución.

$$\frac{x-2}{(x-5)(x+2)}>0$$

Las raíces son:
$x_1=2$
$x_2=5$
$x_3=-2$
Los puntos encontrados dividen la recta en cuatro intervalos: $(-\infty,-2),(-2,2),(2,5),(5,\infty)$.
Probando con valores intermedios a fin de saber cuáles cumplen con la desigualdad:
$-5\in(-\infty,-2)$

$$\frac{(-5)-2}{(-5)^2-3(-5)-10}=\frac{-7}{25+15-10}=\frac{-7}{30}$$

como $-\frac{7}{30}$ no es mayor que 0 no se satisface la desigualdad original en ningún punto de ese intervalo.
$0\in(-2,2)$

$$\frac{0-2}{0^2-3(0)-10}=\frac{-2}{0-0-10}=\frac{-2}{-10}=0.2$$

como 0.2 si es mayor que 0 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.
$3\in(2,5)$

$$\frac{3-2}{3^2-3(3)-10}=\frac{1}{9-9-10}=\frac{1}{-10}=-0.1$$

como -0.1 no es mayor que 0 no se satisface la desigualdad original en ningún punto de ese intervalo.
$10\in(5,\infty)$

$$\frac{10-2}{10^2-3(10)-10}=\frac{8}{100-30-10}=\frac{8}{60}$$

como $\frac{8}{60}$ si es mayor que 0 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.
Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de los intervalos que cumplen la desigualdad: $(-2,2)\cup(5,\infty)$

5) $\frac{x^3+2x^2}{x^2+3x+2}<0$

Solución.

$$\frac{x^2(x+2)}{(x+2)(x+1)}<0$$

Las raíces son:

$$x_1=0$$
$$x_2=-2$$
$$x_3=-1$$

Los puntos encontrados dividen la recta en cuatro intervalos: $(-\infty,-2), (-2,-1), (-1,0), (0,\infty)$

Probando con valores intermedios a fin de saber cuáles cumplen con la desigualdad:

$-3\in(-\infty,-2)$

$$\frac{(-3)^3+2(-3)^2}{(-3)^2+3(-3)+2}=\frac{-27+18}{9-9+2}=-\frac{9}{2}=-4.5$$

como -4.5 si es menor que 0 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.

$-1.3\in(-2,-1)$

$$\frac{(-1.3)^3+2(-1.3)^2}{(-1.3)^2+3(-1.3)+2}=\frac{-2.197+3.38}{1.69-3.9+2}=\frac{1.183}{-0.21}=-5.633$$

como -5.633 si es menor que 0 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.

$-0.5\in(-1,0)$

$$\frac{(-0.5)^3+2(-0.5)^2}{(-0.5)^2+3(-0.5)+2}=\frac{-0.125+0.5}{0.25-1.5+2}=\frac{0.375}{0.75}=0.5$$

como 0.5 no es menor que 0 no se satisface la desigualdad original en ningún punto de ese intervalo.

$1\in(0,\infty)$

$$\frac{1^3+2(1)^2}{1^2+3(1)+2}=\frac{1+2}{1+3+2}=\frac{3}{6}=0.5$$

como 0.5 no es menor que 0 no se satisface la desigualdad original en ningún punto de ese intervalo.

Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de los intervalos que cumple la desigualdad: $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)$

6) $\frac{1}{x-2}>\frac{3}{x+1}$

Solución.

$$\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x+1}>0$$

$$\frac{x+1-3(x-2)}{(x-2)(x+1)}>0$$

$$\frac{x+1-3x+6}{(x-2)(x+1)}>0$$

$$\frac{-2x+7}{(x-2)(x+1)}>0$$

$$\frac{2x-7}{(x-2)(x+1)}<0$$

Las raíces son:

$$x_1=\frac{7}{2}=3.5$$

$$x_2=2$$

$$x_3=-1$$

Los puntos encontrados dividen la recta en cuatro intervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$, $(2,3.5)$, $(3.5,\infty)$

Probando con valores intermedios a fin de saber cuáles cumplen con la desigualdad:

$$-2\in(-\infty,-1)$$

$$\frac{1}{-2-2}=-0.25$$

$$\frac{3}{-2+1}=-3$$

como -0.25 si es mayor que -3 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.

$$0\in(-1,2)$$

$$\frac{1}{0-2}=-0.5$$

$$\frac{3}{0+1}=3$$

como -0.5 no es mayor que 3 no se satisface la desigualdad original para ningún punto de ese intervalo.

$$3.2\in(2,3.5)$$

$$\frac{1}{3.2-2}\approx 0.833$$

$$\frac{3}{3.2+1}=\frac{3}{4.2}\approx 0.714$$

como 0.833 si es mayor que 0.714 se satisface la desigualdad original para cualquier punto de ese intervalo.

$$5\in(3.5,\infty)$$

$$\frac{1}{5-2}\approx 0.333$$

$$\frac{3}{5+1}=\frac{3}{6}=0.5$$

como 0.333 no es mayor que 0.5 no se satisface la desigualdad original para ningún punto de ese intervalo.

Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de los intervalos que cumple la desigualdad: $(-\infty,-1)\cup(2,3.5)$