ANÁLISIS COMBINATORIO Y TEOREMA DEL BINOMIO

UNIDAD II

II.1 ANÁLISIS COMBINATORIO

II.1.1 CONTEO

Para calcular la cantidad de elementos que tienen los conjuntos formados con ciertas reglas, sin que sea necesario saber enumerarlos uno a uno se utiliza el *principio fundamental del conteo.* Este principio establece que si un evento puede tener lugar de m maneras diferentes y, luego de sucedido éste, un segundo evento puede suceder de p maneras distintas, el número de formas diferentes en que pueden realizarse los dos eventos es:

$$m \cdot p$$

Ejemplo.
Si en una reunión hay 3 hombres y 4 mujeres, ¿de cuántas maneras es posible seleccionar una pareja hombre-mujer?

Solución.
Si h_1, h_2, h_3 son los hombres y m_1, m_2, m_3, m_4 son las mujeres. Se aprecia que puede haber cuatro parejas en las que h_1 es el hombre, otras cuatro en las que h_2 es el hombre y otras cuatro en las que el hombre es h_3. De esta manera se concluye que el número de parejas es $4+4+4=12$.

Si se establece que e_1 es el evento "elegir un hombre" y e_2 al evento "elegir una mujer". Como e_1 puede suceder de tres maneras diferentes y e_2 de cuatro maneras diferentes, la cantidad de maneras de formar una pareja (esto es que sucedan los eventos e_1 y e_2) es $3(4)=12$.

Ejemplo.
Consideremos el conjunto $A=\{1,2,3,4,5\}$, ¿cuántos números de cinco cifras diferentes se pueden formar con los elementos del conjunto A?

Solución.
La primera cifra puede elegirse de cinco maneras diferentes, la segunda puede elegirse de cuatro maneras diferentes (no se puede usar el número colocado en el primer lugar), la tercera de tres maneras diferentes, la cuarta de dos maneras y la quinta de 1 manera. Aplicando el principio fundamental de conteo, se obtiene: $5(4)(3)(2)(1)=120$.

Ejemplo.
El juego de placas de un automóvil consta de tres dígitos de los cuales el primero no es cero, seguidas de tres letras diferentes. ¿Cuántos juegos de placas pueden formarse? (se consideran 26 letras y 10 dígitos).

Solución.
La primera letra puede elegirse de 26 maneras diferentes, lo mismo sucede para las otras dos. En el primer lugar de las cifras pueden colocarse 9 dígitos porque el cero no puede estar en el primer lugar. En el siguiente lugar pueden colocarse 10 dígitos y lo mismo sucede en el tercer lugar.
Aplicando el principio de conteo la cantidad pedida será: $9(10)(10)(26)(26)(26)=15'818,400$.

II.1.2 FACTORIAL DE UN NÚMERO

Se define como factorial de un número natural n al producto de n por todos los números que le preceden. Se denota mediante $n!$:

$$n! = 1(2)(3)(4)\cdots(n-1)(n)$$

Por definición, el factorial de cero es uno: $0! \equiv 1$
El factorial de un número crece de forma muy considerable.

Ejemplos:
$3! = 1(2)(3) = 6$
$5! = 1(2)(3)(4)(5) = 120$
$8! = 1(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) = 40{,}320$
$14! = 1(2)(3)(4)\cdots(13)(14) = 87{,}178'291{,}200$

II.1.3 ORDENACIONES

Sea un conjunto de p elementos distintos. Si de ellos se toman grupos ordenados de elementos diferentes, a cada una de estas disposiciones se les llama *ordenaciones* de p elementos tomados de q en q. Esto significa que son las distintas agrupaciones que se pueden formar de manera que dos diferentes agrupaciones difieran de un elemento o en su orden.

Ejemplo.
Dado el conjunto M={a,b,c,d} se quiere formar los tríos ordenados de elementos sin repetir. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

Solución.
Se forma una tabla con tres columnas. En la primera se ponen todos los elementos del conjunto. En la segunda, los pares derivados de cada elemento y en la tercera, las tercias derivadas de cada par:

a	ab	abc
		abd
	ac	acb
		acd
	ad	adb
		adc
b	ba	bac
		bad
	bc	bca
		bcd
	bd	bda
		bdc
c	ca	cab
		cad
	cb	cba
		cbd
	cd	cda
		cdb
d	da	dab
		dac
	db	dba
		dbc
	dc	dca
		dcb

De lo anterior, se puede resaltar que:

- Se han considerado distintas aquellas disposiciones que, teniendo los mismos elementos, estos se encuentran en *distinto orden*.
- Para cada elemento se obtuvieron tres disposiciones en forma de pareja.
- Para cada pareja se obtuvieron dos nuevas disposiciones en forma de tercia.

A las disposiciones obtenidas al final se les llama ordenaciones de 3 elementos tomados de entre 4 dados. La cantidad obtenida es 24 y se denota como: O_3^4

Supóngase que se tiene un conjunto con p elementos y que se desea formar ordenaciones de elementos tomados de q en q. Siguiendo un criterio igual al usado en el ejemplo anterior, se construye una tabla en la que en la primera columna se ubica a los p elementos del conjunto tomándolos de uno en uno. En la siguiente columna, se colocan todas las parejas posibles formadas por p y los $p-1$ elementos que quedan sin disponer en el conjunto. En la tercera columna se colocan las tercias formadas por las parejas y los $p-2$ elementos no usados. Así se puede continuar hasta formar los arreglos de orden q.

Para cada elemento, el número de parejas $(q=2)$ está dado por p menos $q-1$. Para cada pareja, el número de tercias $(q=3)$ está dado por p menos $q-1$. Se aprecia que el proceso es sucesivo.

Se puede concluir que a partir de cada ordenación de orden $q-1$ se forman $p-(q-1)$ ordenaciones de orden q. La cantidad obtenida será: $O_q^p = O_{q-1}^p\left[p-(q-1)\right]$. Aplicando esta fórmula de forma recurrente queda:

$$O_1^p = O_0^p\left[p-(1-1)\right] = O_0^p\, p = 1(p) = p$$
$$O_2^p = O_1^p(p-1) = p(p-1)$$
$$O_3^p = O_2^p(p-2) = p(p-1)(p-2)$$

Siguiendo el mismo razonamiento y teniendo en cuenta que $p-(q-1) = p-q+1$, se llega a la fórmula que permite calcular la cantidad de arreglos de p elementos de orden q:

$$O_q^p = p(p-1)(p-2)\cdots(p-q+1)$$

Multiplicando y dividiendo por $(p-q)!$, se obtiene:

$$O_q^p = \frac{p!}{(p-q)!}$$

Ejemplo.
¿Cuántas señales diferentes de cuatro colores pueden formarse con 7 reflectores de distinto color puestos en una línea?

Solución.

$$O_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = 7(6)(5)(4) = 840$$

Ejemplo.
Dados los dígitos 2,3,5,6,7 y 9.

a) ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar?
Solución.

El número de ordenaciones distintas es: $O_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{720}{6} = 120$

b) ¿Cuántos números mayores de 400 se pueden formar?
Solución.
Para que sean mayores de 400 se deben descartar los dígitos 2 y 3 de la cifra más significativa, así que para la primera cifra hay 4 posibilidades, para la segunda hay 5 y para la tercera hay 4. Así que se pueden formar $4(5)(4) = 80$ números.

c) ¿Cuántos números menores de 400 se pueden formar?
Solución.
Para que sean menores de 400 el primer dígito debe ser 2 ó 3. es decir sólo hay dos posibilidades.

Para el segundo dígito puede ser cualquiera de los cinco restantes: $O_1^5 = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{120}{24} = 5$

Para el tercer dígito puede ser cualquiera de los cuatro restantes: $O_1^4 = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{24}{6} = 4$

Por lo tanto, se pueden formar: $2 \cdot O_1^5 \cdot O_1^4 = 2(5)(4) = 40$ números.

II.1.4 PERMUTACIONES

Dados n objetos diferentes $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, ¿de cuántas maneras es posible ordenarlos? Por ejemplo, para los elementos α, β, γ, hay 6 ordenaciones: αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα. En el caso general se tendrán n maneras de escoger un elemento que ocupará el primer lugar, $n-1$ maneras de elegir el que ocupará el segundo lugar, $n-2$ formas de escoger el que ocupa el tercer lugar y así sucesivamente hasta tener una forma de elegir el que ocupa el último lugar. Por lo tanto, la cantidad de maneras de ordenar n elementos diferentes es: $n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$. Cada ordenación de los n objetos se llama una *permutación simple* de los n elementos y la cantidad de estas permutaciones se representa P_n. De esta manera $P_n = n!$. Es decir, las permutaciones son las agrupaciones de los p elementos tomados a la vez, de manera que dos agrupaciones difieran entre sí en el orden de los elementos.

Se puede concluir, a partir de lo anterior, que las permutaciones son un caso particular de ordenaciones, cuando se consideran todos los elementos del conjunto.

Ejemplo.
¿Cuántos son los anagramas (transposiciones de letras) de la palabra PRÁCTICO?

Solución.
Cada anagrama de PRÁCTICO es nada más que una ordenación de las letras P, R, A, C, T, I, C, O. De esta manera la cantidad de anagramas de la palabra PRÁCTICO será $P_8 = 8! = 40{,}320$.

Ejemplo.
¿Cuántos son los anagramas de la palabra PRÁCTICO que comienzan y terminan en consonante?

Solución.
Como la palabra tiene ocho letras y hay tres vocales, la consonante inicial puede ser elegida de 5 maneras. Al empezar con una consonante, la consonante final sólo puede elegirse de 4 formas. Las

restantes pueden ser arregladas entre esas dos consonantes de $P_6 = 6! = 720$ formas. La respuesta es: $5(4)(6!) = 14,400$.

Ejemplo.
¿En un parque, de cuántas maneras pueden sentarse cinco chicos y cinco chicas en cinco bancas para dos, de modo que en cada banca queden un chico y una chica?

Solución.
El primer chico puede escoger un lugar de 10 formas, el segundo de 8 maneras, el tercero de 6 modos, el cuarto de 4 formas y el quinto de 2 maneras. Colocados los chicos, debemos colocar las 5 chicas en los 5 lugares que sobran, lo que puede ser hecho de $P_5 = 5! = 120$ formas. La respuesta es: $10(8)(6)(4)(2)(5!) = 460,800$.

II.1.5 COMBINACIONES

Sea el conjunto: B = {m,n,o,p,q}

Todos los subconjuntos que tienen tres elementos son:

{m,n,o}, {m,n,p}, {m,n,q}, {m,o,p}, {m,o,q}, {m,p,q}, {n,o,p}, {n,o,q}, {n,p,q},{o,p,q}.

La elección de los elementos de los subconjuntos puede ser efectuada considerando las ordenaciones de cinco elementos tomados de 3 en 3. Sin embargo, algunos subconjuntos serían considerados diferentes siendo idénticos, por ejemplo, los subconjuntos {m,n,o}, {m,o,n}, {n,m,o}, {n,o,m}, {o,m,n}, {o,n,m}. Esto sucede porque en las ordenaciones son diferentes aquellas disposiciones que tienen los mismos elementos en diferente orden. Esto significa que la cantidad $O_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ está contando cada subconjunto una vez para cada ordenación diferente de sus elementos. Como en cada subconjunto los elementos pueden ser ordenados de $P_3 = 3! = 6$ formas, el total de subconjuntos será $\frac{O_3^5}{P_3} = \frac{60}{6} = 10$.

Definición:
Dado un conjunto A con p elementos, se denomina *combinaciones* de p elementos tomados de q en q (con $q \le p$), a todos los subconjuntos de q elementos cada uno tomados de entre los p dados.

Esto significa que son todas las diferentes agrupaciones que pueden formarse de tal manera que desde dichas agrupaciones difieran entre sí en al menos un elemento. Se denota mediante $\binom{p}{q}$ o como C_q^p.

Generalizando, considerados los arreglos de p elementos tomados de q en q, se debe descartar aquellos que, teniendo los mismos elementos, están dispuestos en distinto orden. Entonces resulta:

$$\binom{p}{q} = \frac{O_q^p}{P_q} = \frac{p!}{(p-q)!\,q!}$$

Ejemplo.
¿Cuántas ensaladas conteniendo exactamente cuatro frutas se pueden hacer si se dispone de diez frutas diferentes?

Solución.
Para hacer una ensalada basta escoger cuatro de las diez frutas, lo que puede ser efectuado de $\binom{10}{4}=\frac{10!}{(10-4)!4!}=\frac{10(9)(8)(7)}{24}=210$ formas.

Ejemplo.
De cuántas formas puede escogerse un comité, compuesto de cuatro hombres y tres mujeres, de un grupo de ocho hombres y seis mujeres?

Solución.

De los ocho hombres, se pueden escoger cuatro: $\binom{8}{4}=\frac{8!}{(8-4)!4!}=\frac{8(7)(6)(5)}{24}=70$ maneras.

De las seis mujeres, se pueden escoger tres: $\binom{6}{3}=\frac{6!}{(6-3)!3!}=\frac{6(5)(4)}{6}=20$ maneras.

Por lo tanto, la forma en que el comité puede escogerse es: $\binom{8}{4}\cdot\binom{6}{3}=70(20)=1{,}400$

Ejemplo.
Se marcan cinco puntos sobre una recta r y ocho puntos sobre otra recta s paralela a r. ¿Cuántos triángulos existen con vértices en tres de esos trece puntos?

Solución.
Para determinar un triángulo se debe tomar un punto sobre r y dos sobre s o uno sobre s y dos sobre r.

El número de triángulos en el primer caso es: $5\binom{8}{2}$

El número de triángulos en el segundo caso es: $8\binom{5}{2}$

La respuesta será: $5\binom{8}{2}+8\binom{5}{2}=140+80=220$.

II.1.6 ORDENACIONES CON REPETICIÓN

Cuando se expuso el subtema de ordenaciones, se supuso que los elementos se disponían sin repetir (las ordenaciones simples o sin repetición). Ahora se abordará el caso en que un mismo elemento pueda aparecer repetido en una misma ordenación.

Sea el conjunto A = $\{$a,b,c,d$\}$.

Siguiendo un razonamiento análogo al de la formación de las ordenaciones simples, se disponen las ordenaciones con repetición:

a	aa	aaa
		aab
		aac
	ab	aba
		abb
		abc
	ac	aca
		acb
		acc
b	ba	baa
		bab
		bac
	bb	bba
		bbb
		bbc
	bc	bca
		bcb
		bcc
c	ca	caa
		cab
		cac
	cb	cba
		cbb
		cbc
	cc	cca
		ccb
		ccc

Se aprecia que en la primera columna se colocaron los elementos, en la segunda las ordenaciones de dos en dos y en la tercera las ordenaciones de tres en tres. En este caso, por cada elemento se obtienen tantas ordenaciones con repetición como elementos hay en el conjunto.

Las ordenaciones con repetición de 2 elementos tomados de entre 3 dados es 9 y las ordenaciones con repetición de 3 elementos tomados de entre 3 dados es 27.

Las ordenaciones con repetición se denotan como: OR_q^p

De esta manera, si se tienen p elementos, las ordenaciones con repetición con orden el respectivo serán:

$$OR_1^p = p$$
$$OR_2^p = p(p) = p^2$$
$$OR_3^p = p(p)(p) = p^3$$

y así sucesivamente, por lo que:

$$OR_q^p = p^q$$

Ejemplo.
Con una cerradura de combinación de seis discos, de diez letras cada uno (las mismas letras en cada disco), ¿cuántas disposiciones pueden obtenerse?

Solución.
Serán las ordenaciones con repetición de diez letras tomadas de seis en seis. Por lo tanto:
$OR_6^{10} = 10^6 = 1'000,000$

II.1.7 COMBINACIONES CON REPETICIÓN

De forma análoga a las ordenaciones, se puede suponer que, en una combinación, un determinado elemento pueda figurar varias veces, es decir se tratan de *combinaciones con repetición*. La cantidad de combinaciones con repetición de p elementos tomados de q en q se denota como CR_q^p. Este número puede ser, evidentemente, mayor que el de las combinaciones simples de p elementos tomados de q en q.

Para observar cómo se forman estas combinaciones, considérense los elementos a, b y c. Para obtener las combinaciones de orden dos con repetición, será necesario agregar a las combinaciones simples de orden dos ab, ac, bc, los nuevos grupos donde una misma letra puede figurar hasta dos veces, o sea aa, bb, cc, teniendo en total las combinaciones con repetición de orden dos: aa, ab, ac, bb, bc, cc.

Se deduce que las combinaciones de orden dos con repetición, de p elementos, se obtienen agregando, sucesivamente, a la derecha de cada combinación de orden uno, dicho elemento y cada uno de los subsecuentes. A partir de lo anterior, se puede concluir que para formar las combinaciones con repetición de p elementos tomados de q en q, se forman las de orden anterior $q-1$, y a la derecha de cada una de estas se coloca, sucesivamente, el último de los elementos que figura en ella y cada uno de los siguientes, hasta el último de los elementos dados, supuestos alineados los elementos de cada grupo en orden numérico o alfabético.

La expresión que permite calcular la cantidad de combinaciones con repetición es:

$$CR_q^p = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!q!}$$

Ejemplo.
Dados los elementos: $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ obtener:

a) P_4

b) O_1^4, O_2^4, O_3^4, O_4^4

c) $\binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$

d) OR_1^4, OR_2^4

e) CR_1^4, CR_2^4, CR_3^4

f) Mostrar cada caso.

Solución.

a) $P_4 = 4! = 24$

b) $O_1^4 = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{24}{6} = 4$, $O_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$, $O_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{24}{1} = 24$,

$O_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{24}{1} = 24$

c) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{24}{6(1)} = 4$, $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{2(2)} = 6$, $\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{24}{1(6)} = 4$,

$\binom{4}{4} = \frac{4!}{(4-4)!4!} = \frac{24}{1(24)} = 1$

d) $OR_1^4 = 4^1 = 4$, $OR_2^4 = 4^2 = 16$

e) $CR_1^4 = \frac{(4+1-1)!}{(4-1)!1!} = \frac{24}{6(1)} = 4$, $CR_2^4 = \frac{(4+2-1)!}{(4-1)!2!} = \frac{120}{6(2)} = 10$, $CR_3^4 = \frac{(4+3-1)!}{(4-1)!3!} = \frac{720}{6(6)} = 20$

f) a) {♣,♦,♥,♠}, {♣,♦,♠,♥}, {♣,♥,♦,♠}, {♣,♥,♠,♦}, {♣,♠,♦,♥}, {♣,♠,♥,♦}
{♦,♣,♥,♠}, {♦,♣,♠,♥}, {♦,♥,♣,♠}, {♦,♥,♠,♣}, {♦,♠,♣,♥}, {♦,♠,♥,♣}
{♥,♣,♦,♠}, {♥,♣,♠,♦}, {♥,♦,♣,♠}, {♥,♦,♠,♣}, {♥,♠,♣,♦}, {♥,♠,♦,♣}
{♠,♣,♦,♥}, {♠,♣,♥,♦}, {♠,♦,♣,♥}, {♠,♦,♥,♣}, {♠,♥,♣,♦}, {♠,♥,♦,♣}

$\therefore \quad P_4 = 24$

b1) {♣}, {♦}, {♥}, {♠}

$\therefore \quad O_1^4 = 4$

b2) {♣,♦}, {♣,♥}, {♣,♠}, {♦,♣}, {♦,♥}, {♦,♠}, {♥,♣}, {♥,♦}, {♥,♠}, {♠,♣}, {♠,♦}, {♠,♥}

$\therefore \quad O_2^4 = 12$

b3) {♣,♦,♥}, {♣,♥,♦}, {♣,♦,♠}, {♣,♠,♦}, {♣,♥,♠}, {♣,♠,♥}
{♦,♣,♥}, {♦,♥,♣}, {♦,♣,♠}, {♦,♠,♣}, {♦,♥,♠}, {♦,♠,♥}
{♥,♣,♦}, {♥,♦,♣}, {♥,♣,♠}, {♥,♠,♣}, {♥,♦,♠}, {♥,♠,♦}
{♠,♣,♦}, {♠,♦,♣}, {♠,♣,♥}, {♠,♥,♣}, {♠,♦,♥}, {♠,♥,♦}

$\therefore \quad O_3^4 = 24$

b4) {♣,♦,♥,♠}, {♣,♦,♠,♥}, {♣,♥,♦,♠}, {♣,♥,♠,♦}, {♣,♠,♦,♥}, {♣,♠,♥,♦}
{♦,♣,♥,♠}, {♦,♣,♠,♥}, {♦,♥,♣,♠}, {♦,♥,♠,♣}, {♦,♠,♣,♥}, {♦,♠,♥,♣}
{♥,♣,♦,♠}, {♥,♣,♠,♦}, {♥,♦,♣,♠}, {♥,♦,♠,♣}, {♥,♠,♣,♦}, {♥,♠,♦,♣}
{♠,♣,♦,♥}, {♠,♣,♥,♦}, {♠,♦,♣,♥}, {♠,♦,♥,♣}, {♠,♥,♣,♦}, {♠,♥,♦,♣}

$\therefore \quad O_4^4 = 24 = P_4$

c1) {♣}, {♦}, {♥}, {♠}

$\therefore \quad C_1^4 = 4$

c2) {♣,♦},{♣,♥}, {♣,♠}, {♦,♥}, {♦,♠}, {♥,♠}

$\therefore \quad C_2^4 = 6$

c3) {♣,♦,♥}, {♣,♦,♠}, {♣,♥,♠}, {♦,♥,♠}

$\therefore \quad C_3^4 = 4$

c4) {♣,♦,♥,♠}

$\therefore \quad C_4^4 = 1$

d1) {♣}, {♦}, {♥}, {♠}

$\therefore \quad OR_1^4 = 4$

d2) {♣,♣}, {♣,♦}, {♣,♥}, {♣,♠}, {♦,♦}, {♦,♣}, {♦,♥}, {♦,♠}
{♥,♥}, {♥,♣}, {♥,♦}, {♥,♠}, {♠,♠}, {♠,♣}, {♠,♦}, {♠,♥}

$\therefore \quad OR_2^4 = 16$

e1) {♣}, {♦}, {♥}, {♠}

$\therefore \quad CR_1^4 = 4$

e2) {♣,♣}, {♣,♦}, {♣,♥}, {♣,♠}, {♦,♦}, {♦,♥}, {♦,♠}, {♥,♥}, {♥,♠}, {♠,♠}

$\therefore \quad CR_2^4 = 10$

e3) {♣,♣,♣}, {♣,♣,♦}, {♣,♣,♥}, {♣,♣,♠}, {♦,♦,♦}, {♦,♦,♣}, {♦,♦,♥}, {♦,♦,♠}
{♥,♥,♥}, {♥,♥,♣}, {♥,♥,♦}, {♥,♥,♠}, {♠,♠,♠}, {♠,♠,♣}, {♠,♠,♦}, {♠,♠,♥}
{♣,♦,♥}, {♣,♦,♠}, {♣,♥,♠}, {♦,♥,♠}

$\therefore \quad CR_3^4 = 20$

II.2 TEOREMA DEL BINOMIO

El teorema del binomio, también llamado binomio de Newton, expresa la enésima potencia de un binomio como un polinomio. El desarrollo del binomio $(a+b)^n$ posee singular importancia ya que aparece con mucha frecuencia en Matemáticas y posee diversas aplicaciones en otras áreas del conocimiento.

II.2.1 FÓRMULA GENERAL DEL BINOMIO

Sea un binomio de la forma $(a+b)$.

Si a este binomio se le multiplica sucesivamente por si mismo se obtienen las siguientes potencias:

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = \underbrace{(a+b)(a+b)}_{2\ veces} = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{3\ veces} = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4 = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{4\ veces} = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5 = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{5\ veces} = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

$$(a+b)^6 = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{6\ veces} = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

De lo anterior, se aprecia que:

a) El desarrollo de $(a+b)^n$ tiene $n+1$ términos
b) Las potencias de a empiezan con n en el primer término y van disminuyendo en cada término, hasta cero en el último
c) Las potencias de b empiezan con exponente cero en el primer término y van aumentando en uno con cada término, hasta n en el último.
d) Para cada término la suma de los exponentes de a y b es n.
e) El coeficiente del primer término es uno y el del segundo es n.
f) El coeficiente de un término cualquiera es igual al producto del coeficiente del término anterior por el exponente de a dividido entre el número que indica el orden de ese término.
g) Los términos que equidistan de los extremos tienen coeficientes iguales.

Ejemplo.

$$(a+b)^5 = \underset{\substack{\uparrow \\ es\,1}}{a^5} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1(5)}{1}}}{5a^4b} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{5(4)}{2}}}{10a^3b^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{10(3)}{3}}}{10a^2b^3} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{10(2)}{4}}}{5ab^4} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{5(1)}{5}}}{b^5}$$

Aplicando las consideraciones expuestas en los incisos para el caso general se tiene:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1(2)}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1(2)(3)}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1(2)(3)(4)}a^{n-4}b^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1(2)(3)(4)(5)}a^{n-5}b^5 + \cdots + b^n$$

Ahora, si se introduce la notación factorial, la fórmula del binomio puede escribirse así:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}a^{n-4}b^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}a^{n-5}b^5 + \cdots + b^n$$

Ejemplo.
Obtener el desarrollo de $(2x-5y)^4$

Solución.
Haciendo $a=2x$ y $b=-5y$
Aplicando la fórmula se tiene:

$$(2x-5y)^4 = (2x)^4 + \frac{4}{1!}(2x)^3(-5y) + \frac{4(3)}{2!}(2x)^2(-5y)^2 + \frac{4(3)(2)}{3!}(2x)(-5y)^3 + (-5y)^4$$

$$(2x-5y)^4 = (2x)^4 + \frac{4}{1}(2x)^3(-5y) + \frac{12}{2}(2x)^2(-5y)^2 + \frac{24}{6}(2x)(-5y)^3 + (-5y)^4$$

$$(2x-5y)^4 = 16x^4 - 160x^3y + 600x^2y^2 - 1000xy^3 + 625y^4$$

II.2.2 EL R-ÉSIMO TERMINO DEL DESARROLLO BINOMIAL

En el desarrollo binomial:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2!}a^2b^{n-2} + \frac{n}{1!}a^1b^{n-1} + b^n$$

si se decide llamar a un termino cualquiera del desarrollo como *r-ésimo termino*, entonces se encuentra que:

- El exponente del término b del binomio es: $r-1$
- El exponente del término a del binomio es: $n-(r-1)=n-r+1$
- El denominador del coeficiente es: $(r-1)!$
- El numerador del coeficiente es: $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)$

En consecuencia el r-ésimo termino de la expansión de $(a+b)^n$ es:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

Ejemplo.
Encontrar el quinto término del desarrollo $(x+5y)^6$

Solución.
$a=x, b=5y,\ n=6, r=5$, aplicando la expresión: $\frac{6(5)(4)(3)}{4!}x^2(5y)^4=15x^2(625y^4)=9{,}375x^2y^4$

II.2.3 TEOREMA DEL BINOMIO EXPRESADO A TRAVÉS DE COMBINACIONES

El desarrollo de la expresión $(a+b)^n$ también se puede obtener aplicado la teoría del análisis combinatorio.

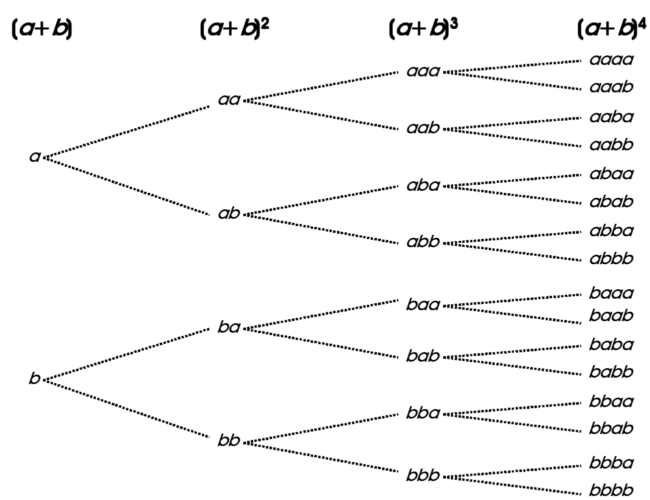
Si se multiplica el binomio por si mismo de forma reiterada se obtiene:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb=a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= (aa+ab+ba+bb)(a+b)=aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb\\
&= a^3+3a^2b+3b^2+b^3\\
(a+b)^4 &= (aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb)(a+b)=aaaa+aaab+aaba+aabb\\
&\quad +abaa+abab+abba+abbb+baaa+baab+baba+babb+bbaa+bbab+bbba+bbbb\\
&= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}
$$

Puede observarse que el número de términos o sumandos de $(a+b)^3$ es ocho y es el doble que el de $(a+b)^2$, ya que los términos se obtienen añadiendo al final de los cuatro una a o una b. Por su parte, el número de términos de $(a+b)^4$ es 16, ya que se añade al final de cada uno de los ocho términos de $(a+b)^3$ una a o una b.

De forma similar, para obtener $(a+b)^5$, se procedería de la misma manera, partiendo de $(a+b)^4$ y se obtendrían 32 términos.

Por ejemplo, los términos del desarrollo $(a+b)^4$ pueden obtenerse a través de un diagrama de árbol:



Si se suman los términos de cada columna, se obtienen respectivamente los desarrollos para $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ y $(a+b)^4$. Cada término se obtiene de la columna anterior añadiendo al final la letra a o la letra b.

Como las letras que aparecen están multiplicando entre sí, la secuencia $abaa$ (por ejemplo) no es otra cosa que a^3b, y por tanto, es igual a las secuencias $baaa$, $aaba$ y $aaab$.

Lo que se tiene que encontrar es ¿cuántas veces aparece a^4, cuántas a^3b, cuántas a^2b^2, cuántas ab^3, y cuántas b^4? A fin de determinar esto, se aplicará el concepto de combinaciones antes expuesto.

Como se definieron, las combinaciones de p elementos tomados de q en q, son las posibles formas de hacer arreglos de q elementos, escogiéndolos de un conjunto de p elementos, con $q < p$, de modo que dos de esos arreglos son distintos sólo si tienen algún elemento diferente (es decir, si tienen los mismos q elementos, aunque estén colocados en diferente orden, se considera el mismo grupo).

Por ejemplo, para calcular $\binom{4}{2}$, se deben formar grupos de dos elementos, escogiéndolos de entre cuatro elementos dados. Suponiendo que los elementos están numerados del 1 al 4. Entonces los grupos de dos elementos serán: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$.

Regresando al desarrollo de $(a+b)^4$, los términos con dos b pueden tenerlas situadas en los lugares 1º y 2º, 1º y 3º, 1º y 4º, 2º y 3º, 2º y 4º, y 3º y 4º (no hay distinción entre el caso 1º y 2º y el caso 2º y 1º). Por tanto el término con dos b del desarrollo de $(a+b)^4$, es decir, el término a^2b^2, aparece un número de veces igual al número $C_2^4 = \binom{4}{2} = 6$. De igual modo, los términos de $(a+b)^4$ con una b aparecen un número de veces igual a $C_1^4 = \binom{4}{1} = 4$. Siguiendo el mismo razonamiento se tiene que:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$$

De acuerdo a lo anterior, se puede llegar a una generalización del desarrollo del binomio:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \binom{n}{4}a^{n-4}b^4 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

que en forma condensada se puede escribir como:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad n \geq 1$$

que es el teorema del binomio expresado a través de combinaciones.

Para encontrar el r-ésimo término del desarrollo se aplica la siguiente expresión:

$$\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

Ejemplo.
Aplicando el binomio de Newton desarrollar $(x+y)^6$

Solución:

$$(x+y)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{6-k}y^k$$

$$=\binom{6}{0}x^6+\binom{6}{1}x^5y+\binom{6}{2}x^4y^2+\binom{6}{3}x^3y^3+\binom{6}{4}x^2y^4+\binom{6}{5}xy^5+\binom{6}{6}y^6$$

$$=\frac{6!}{0!(6-0)!}x^6+\frac{6!}{1!(6-1)!}x^5y+\frac{6!}{2!(6-2)!}x^4y^2+\frac{6!}{3!(6-3)!}x^3y^3+\frac{6!}{4!(6-4)!}x^2y^4+$$

$$+\frac{6!}{5!(6-5)!}xy^5+\frac{6!}{6!(6-0)!}y^6$$

$$=\frac{720}{0!(6!)}x^6+\frac{720}{1!(5!)}x^5y+\frac{720}{2!(4!)}x^4y^2+\frac{720}{3!(3!)}x^3y^3+\frac{720}{4!(2!)}x^2y^4+\frac{720}{5!(1!)}xy^5+\frac{720}{6!(0!)}y^6$$

$$=\frac{720}{1(720)}x^6+\frac{720}{1(120)}x^5y+\frac{720}{2(24)}x^4y^2+\frac{720}{6(6)}x^3y^3+\frac{720}{24(2)}x^2y^4+\frac{720}{120(1)}xy^5+\frac{720}{720(1)}y^6$$

$$=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

Ejemplo.
Obtener el cuarto término de la expresión $(x-y)^{20}$

Solución.
Sustituyendo $n=20,\ r=4$:

$$\binom{20}{4-1}x^{20-4+1}(-y)^{4-1}=\binom{20}{3}x^{17}(-y)^3=\frac{20!}{3!(20-3)!}x^{17}(-y)^3=\frac{20!}{3!(17!)}x^{17}(-y)^3$$

$$=\frac{20(19)(18)}{6}x^{17}(-y)^3=-1140x^{17}y^3$$

II.2.4 TRIÁNGULO DE PASCAL

El triángulo de Pascal es un esquema triangular de números en cuyo vértice hay un uno que corresponde a $(a+b)^0=1$. En el segundo renglón hay dos números uno que corresponderán a los coeficientes de a y b respectivamente. La fila siguiente se obtiene sumando los dos números inmediatos a él en la fila precedente y luego se le agrega un uno a cada extremo de la fila.

Después, se efectúa una relación entre los números del triángulo de Pascal y la suma de las potencias de a y b, de forma que los coeficientes se asignan en el mismo orden en que aparecen. Gráficamente esto es:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
(a+b)^1 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^2 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
(a+b)^4 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
(a+b)^5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Por ejemplo, para encontrar los coeficientes del desarrollo $(a+b)^5$, se le aplican los factores de la fila correspondiente, tal y como se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{array}{cccccc}
a^5 & a^4b & a^3b^2 & a^2b^3 & ab^4 & b^5 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array}$$

$$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Ejemplo.

Aplicar el triángulo de Pascal para desarrollar $(2a^4+6b^3)^6$

Solución.

Aplicando los coeficientes respectivos se tiene:

$$\begin{aligned}
(2a^4+6b^3)^6 &= (2a^4)^6+6(2a^4)^5(6b^3)+15(2a^4)^4(6b^3)^2+20(2a^4)^3(6b^3)^3+15(2a^4)^2(6b^3)^4+ \\
&\quad +6(2a^4)(6b^3)^5+(6b^3)^6 \\
&= 64a^{24}+1{,}152a^{20}b^3+8{,}640a^{16}b^6+34{,}560a^{12}b^9+77{,}760a^8b^{12}+93{,}312a^4b^{15}+ \\
&\quad +46{,}656b^{18}
\end{aligned}$$

II.2.5 TEOREMA DEL BINOMIO CON EXPONENTES NEGATIVOS O FRACCIONARIOS

La fórmula general para desarrollar el binomio $(a+b)^n$ también es aplicable en el caso de que el exponente sea fraccionario o negativo, siempre que se cumpla que $a>b$ y $a>0$.

Para el caso de que el exponente sea fraccionario, el desarrollo presenta la siguiente forma:

$$(a+b)^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{n}{m}}+\frac{n}{m}a^{\frac{n-m}{m}}b+\frac{n(n-m)}{m^2(2!)}a^{\frac{n-2m}{m}}b^2+\frac{n(n-m)(n-2m)}{m^3(3!)}a^{\frac{n-3m}{m}}b^3+\cdots$$

Por su parte, si el exponente es negativo, el desarrollo posee la siguiente forma:

$$(a+b)^{-n}=a^{-n}-na^{-n-1}b+\frac{n(n+1)}{2!}a^{-n-2}b^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^{-n-3}b^3+\cdots$$

Nótese como en este caso, los signos de los términos se alternan.

Se aprecia como para ambos casos, el desarrollo posee un número infinito de términos.

Ejemplo.

Obtener los seis primeros términos del desarrollo $(x+y)^{\frac{2}{5}}$

Solución.

$$(x+y)^{\frac{2}{5}}=x^{\frac{2}{5}}+\frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}y-\frac{6}{25(2!)}x^{\frac{-8}{5}}y^2+\frac{48}{125(3!)}x^{\frac{-13}{5}}y^3-\frac{624}{625(4!)}x^{\frac{-18}{5}}y^4+\frac{11{,}232}{3{,}125(5!)}x^{\frac{-23}{5}}y^5+\cdots$$

$$=x^{\frac{2}{5}}+\frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}y-\frac{6}{50}x^{\frac{-8}{5}}y^2+\frac{48}{750}x^{\frac{-13}{5}}y^3-\frac{624}{15{,}000}x^{\frac{-18}{5}}y^4+\frac{11{,}232}{375{,}000}x^{\frac{-23}{5}}y^5+\cdots$$

Ejemplo.

Obtener los siete primeros términos del desarrollo $\frac{1}{2x+3y}$

Solución.

$$\frac{1}{2x+3y}=(2x+3y)^{-1}$$

$$(2x+3y)^{-1}=(2x)^{-1}-(2x)^{-2}(3y)+\frac{2}{2!}(2x)^{-3}(3y)^2-\frac{6}{3!}(2x)^{-4}(3y)^3+\frac{24}{4!}(2x)^{-5}(3y)^4+$$

$$-\frac{120}{5!}(2x)^{-6}(3y)^5+\frac{720}{6!}(2x)^{-7}(3y)^6+\cdots$$

$$(2x+3y)^{-1}=\frac{1}{2}x^{-1}-\frac{3}{4}x^{-2}y+\frac{9}{8}x^{-3}y^2-\frac{27}{16}x^{-4}y^3+\frac{81}{32}x^{-5}y^4-\frac{243}{64}x^{-6}y^5+\frac{729}{128}x^{-7}y^6+\cdots$$

II.2.6 CÁLCULO DE RAÍCES POR MEDIO DEL BINOMIO

Una de las aplicaciones que tiene el desarrollo del binomio es que pueden extraerse raíces considerando que $\sqrt[n]{1+a}=(1+a)^{\frac{1}{n}}$. Esto es:

$$(1+a)^{\frac{1}{n}}=1^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}(1)^{\frac{1-n}{n}}a+\frac{1-n}{n^2(2!)}1^{\frac{1-2n}{n}}a^2+\frac{(1-n)(1-2n)}{n^3(3!)}1^{\frac{1-3n}{n}}a^3+\frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{n^4(4!)}1^{\frac{1-4n}{n}}a^4+\cdots$$

$$\Rightarrow \quad (1+a)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}a + \frac{1-n}{n^2(2!)}a^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3(3!)}a^3 + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{n^4(4!)}a^4 + \cdots$$

Para calcular la raíz enésima de un número cualquiera, se descompone el número en dos sumandos, de forma tal que el primero sea la mayor potencia perfecta del orden de la raíz y posteriormente se expresa como factor común.

Ejemplos.
Calcular de forma aproximada las siguientes raíces:

1) $\sqrt{30}$
Solución.

$$\sqrt{30} = \sqrt{25+5} = \sqrt{25\left(1+\frac{5}{25}\right)} = 5\sqrt{1+\frac{5}{25}} = 5\left(1+\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 5\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1-2}{2^2(2!)}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{(1-2)(1-2(2))}{2^3(3!)}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{(1-2)(1-2(2))(1-3(2))}{2^4(4!)}\left(\frac{1}{5}\right)^4+\cdots\right)$$

$$\approx 5(1+0.1-0.005+0.0005-0.0000625+\cdots) \approx 5(1.0954375)$$

$$\approx 5.4771875$$

2) $\sqrt[3]{10}$
Solución.

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8+2} = \sqrt[3]{8\left(1+\frac{2}{8}\right)} = 2\sqrt[3]{1+\frac{2}{8}} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1-3}{3^2(2!)}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{(1-3)(1-2(3))}{3^3(3!)}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{(1-3)(1-2(3))(1-3(3))}{3^4(4!)}\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots\right)$$

$$\approx 2(1+0.08333333-0.00694444+0.00096450-0.00016075+\cdots) \approx 2(1.07719264)$$

$$\approx 2.15438528$$

Nótese como los términos cada vez son más pequeños, así que para fines prácticos, basta con calcular los primero cuatro términos para tener una aproximación razonable de la raíz buscada.

3) $\sqrt[4]{260}$
Solución.

$$\sqrt[4]{260} = \sqrt[4]{256+4} = \sqrt[4]{256\left(1+\frac{4}{256}\right)} = 4\sqrt[4]{1+\frac{4}{256}} = 4\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\approx 4\left(1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{64}\right)+\frac{1-4}{4^2(2!)}\left(\frac{1}{64}\right)^2+\frac{(1-4)(1-2(4))}{4^3(3!)}\left(\frac{1}{64}\right)^3\right)$$

$$\approx 4(1+0.0390625-0.00002288+0.00000020) \approx 4(1.03903982)$$

$$\approx 4.15615928$$

II.2.7 INTERÉS SIMPLE E INTERÉS COMPUESTO

Un *interés* es un beneficio que se obtiene al prestar una cantidad de dinero, capital, durante un cierto tiempo. Es decir, el interés es la diferencia entre el monto final y el capital inicial.

Se llama *tasa de interés* o *rédito* al tanto por ciento al que está invertido un capital C en una unidad de tiempo (por lo general se toma como unidad de tiempo el año). La tasa anual de interés se representa por i y se expresa como un porcentaje (5%, por ejemplo) o como su equivalente en forma decimal (0.05). En los cálculos normalmente se utiliza esta última expresión, aunque la información se transmita en forma de tanto por ciento.

Interés simple es el que se obtiene cuando los intereses producidos, durante todo el tiempo que dure una inversión, se deben únicamente al capital inicial (los intereses se retiran).

Interés compuesto es el que se obtiene cuando al capital se le suman periódicamente (en general, los periodos son anuales) los intereses producidos. Así, al final de cada periodo, el capital que se tiene es el capital anterior más los intereses producidos por ese capital en dicho periodo (los intereses se reinvierten).

- *Fórmula del interés simple*

El interés o rédito R que produce un capital es directamente proporcional al capital inicial C, al tiempo t (en años) y a la tasa de interés i (en decimal) :

$$R = C \cdot i \cdot t$$

Ejemplos.

1) Calcular a cuánto asciende el interés simple producido por un capital de \$50,000 invertido durante 4 años a una tasa del 6% anual.
Solución

$$R = 50{,}000(0.06)(4) = \$12{,}000$$

2) Calcular el interés simple producido por \$20,000 durante 90 días a una tasa de interés anual del 5%.
Solución.

El año bancario posee 360 días, así que: $R = 20{,}000(0.05)\left(\frac{90}{360}\right) = \$250$

3) Al cabo de un año, un banco ha ingresado en una cuenta de ahorro, en concepto de intereses \$1,200. La tasa de interés de esa cuenta de ahorro es del 2%. ¿Cuál es el saldo medio (capital) de dicha cuenta en ese año?
Solución.

Sustituyendo: $1{,}200 = C(0.02)(1)$

Despejando el capital: $C = \frac{1{,}200}{(0.02)(1)} = 60{,}000$

4) Un préstamo de \$40,000 se convierte al cabo de un año en \$48,000. ¿Cuál es la tasa de interés cobrada?
Solución.

Los intereses han ascendido a: $\$48{,}000 - \$40{,}000 = \$8{,}000$

Sustituyendo: $8{,}000 = 40{,}000(i)(1)$

Despejando la tasa de interés: $i = \frac{8{,}000}{(40{,}000)(1)} = 0.2 = 20\%$

5) Un capital de $450,000 invertido a una tasa de interés del 3% durante un cierto tiempo, ha supuesto unos intereses de $9,000. ¿Cuánto tiempo ha estado invertido?
Solución.
Sustituyendo: $9{,}000 = 450{,}000(0.03)(t)$
Despejando el tiempo: $t = \frac{9{,}000}{(450{,}000)(0.03)} = \frac{2}{3}\ años = 8\ meses$

- *Fórmula del interés compuesto*

Sea C un capital invertido durante n años a una tasa i de interés compuesto por cada año.

Durante el primer año el capital produce un interés $C \cdot i$, por tanto, el monto final M_1 será:
$M_1 = C + C \cdot i = C(1+i)$
Después del segundo año, el monto M_1 produce un interés $C(1+i)i = C(i+i^2)$, por lo tanto, el monto final M_2 será:
$M_2 = M_1 + C(i+i^2) = C(1+i) + C(i+i^2) = C(i^2+2i+1) = C(1+i)^2$

Prosiguiendo de forma análoga, se puede concluir que al cabo de n años el capital inicial C, invertido en la modalidad de interés compuesto se convertirá en un monto final M_n:

$$M_n = C(1+i)^n$$

Nótese como es un caso particular del teorema del binomio.

Aunque la fórmula del interés compuesto se dedujo para una tasa de interés anual durante n años, es también válida si los periodos de conversión (capitalización), son semestres, trimestres, días, etc., sólo que se tienen que convertir éstos a años. Por ejemplo:

Si los periodos de conversión son semestrales, la expresión es: $M_n = C\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}$

Si los periodos de conversión son cuatrimestrales, la expresión es: $M_n = C\left(1+\frac{i}{3}\right)^{3n}$

Si los periodos de conversión son trimestrales, la expresión es: $M_n = C\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n}$

La tasa de interés se encuentra despejando de $M_n = C(1+i)^n$, esto es:

$$\frac{M_n}{C} = (1+i)^n \quad \Rightarrow \quad 1+i = \sqrt[n]{\frac{M_n}{C}} \quad \therefore \quad i = \sqrt[n]{\frac{M_n}{C}} - 1$$

El capital inicial se halla despejando en la fórmula original, esto es:

$$C = \frac{M_n}{(1+i)^n}$$

Por su parte, el tiempo de inversión también se obtiene despejando en la fórmula original, utilizando las propiedades de los logaritmos, esto es:

$$\log_{10} M_n = \log_{10} C(1+i)^n \quad \Rightarrow \quad \log_{10} M_n = \log_{10} C + \log_{10}(1+i)^n$$

$$\Rightarrow \quad \log_{10} M_n = \log_{10} C + n\log_{10}(1+i) \quad \therefore \quad n = \frac{\log_{10} M_n - \log_{10} C}{\log_{10}(1+i)}$$

Ejemplos.

1) Determinar el monto que se obtendrá de un capital de \$50,000 después de 5 años a una tasa de interés compuesto anual del 6%.
Solución.

$$M_5 = 50{,}000(1+0.06)^5 \approx 50{,}000(1.338225578) \approx \$66{,}911.27$$

2) Calcular la tasa de interés compuesto anual que se ha aplicado a un capital de \$90,000 para que al final de 3 años se haya convertido en \$115,000.
Solución.

$$i = \sqrt[3]{\frac{115{,}000}{90{,}000}} - 1 \approx 1.0851 - 1 \approx 0.0851 \approx 8.51\%$$

3) Un cierto capital invertido durante 8 años a una tasa de interés compuesto anual del 12% se ha convertido en \$2'000,000. Calcular el capital inicial, sabiendo que los intereses se han pagado semestralmente.
Solución.

De la expresión $M_n = C\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}$ se despeja C:

$$C = \frac{M_n}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}} = \frac{2'000{,}000}{\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2(8)}} \approx 787{,}292.56$$

4) Una persona solicitó un préstamo bancario de \$40,000 para comprar un automóvil a una tasa de 24%. Si no se efectuó ningún pago, calcular el tiempo que transcurrió para que su deuda se transformara en \$70,000.
Solución.

$$n = \frac{log_{10} M_n - log_{10} C}{log_{10}(1+i)} = \frac{log_{10} 70{,}000 - log_{10} 40{,}000}{log_{10}(1+0.24)} \approx \frac{4.845098040 - 4.602059991}{0.093421685} \approx 2.6015\ \textit{años}$$