CONJUNTOS, LÓGICA E INDUCCIÓN MATEMÁTICA

UNIDAD I

I.1 CONJUNTOS

I.1.1 IDEA INTUITIVA DE CONJUNTO Y SUS FORMAS DE EXPRESIÓN

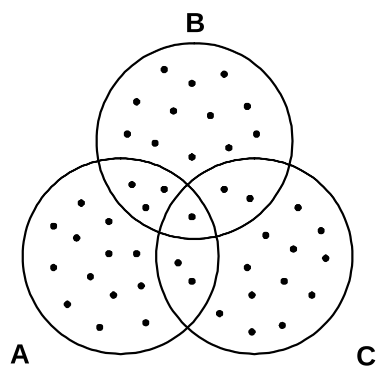
Un *conjunto* es una colección de elementos especificados que poseen algo común. Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas.

En general, existen tres formas de representar conjuntos:

1. Por *extensión*. Los elementos de los conjuntos se colocan entre llaves y se forma una lista que se separa por comas. De esta manera, el conjunto enumera a todos sus elementos sin repetición. Por ejemplo: $A=\{gato, perro, pez, canario, conejo\}$

2. Por *comprensión*. Los elementos se expresan a través de una regla que determina su naturaleza. También se emplean llaves y se utiliza el símbolo | que significa "tal que" a manera de condición. Por ejemplo: $F=\{x \mid x\ son\ frutas\ de\ color\ verde\}$

3. Por *diagramas de Venn*. Son regiones planas cerradas que contienen a los elementos sin la necesidad de especificarlos. Son muy útiles para visualizar las relaciones y operaciones entre conjuntos. Por ejemplo:



Cuando un elemento *pertenece* a un conjunto se le denota por $\in$.

Ejemplos.
Escribir por extensión a los siguientes conjuntos:

a) $P=\{x \mid x\ es\ un\ país\ de\ América\ del\ Norte\}$

Solución:
$P=\{Canadá,\ Estados\ Unidos,\ México\}$

b) $B=\{x \mid x=2n-1,\quad n\in N,\quad n<6\}$

Solución:
$B=\{1,3,5,7,9\}$

c) $D=\{x \mid x=5n, \quad n\in Z, \quad -4<n\le 4\}$
Solución:
$D=\{-15,-10,-5,0,5,10,15,20\}$

d) $E=\left\{x \mid x=\dfrac{3^n}{2n}, \quad n\in N, \quad n\le 7\right\}$
Solución:
$E=\left\{\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4},\dfrac{27}{6},\dfrac{81}{8},\dfrac{243}{10},\dfrac{729}{12},\dfrac{2187}{14}\right\}$

Ejemplo.
Escribir por comprensión los siguientes conjuntos:

a) $H=\{metro,\ camión,\ trolebús,\ tren\ ligero,\ microbús,\ metrobús\}$
Solución:
$H=\{x \mid x\ es\ un\ medio\ masivo\ de\ transporte\ de\ pasajeros\ en\ el\ D.F.\}$

b) $R=\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$
Solución:
$R=\{x \mid x=n^2, \quad n\in N, \quad n\le 10\}$

c) $S=\left\{0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{6},\dfrac{5}{7},\dfrac{6}{8},\dfrac{7}{9}\right\}$
Solución:
$S=\left\{x \mid x=\dfrac{n-1}{n+1}, \quad n\in N, \quad n<9\right\}$

d) $T=\{-17,-13,-9,-5,-1,3,7,11,15,19\}$
$T=\{x \mid x=4n-1, \quad n\in Z, \quad -5<n\le 5\}$

Dos conjuntos son *iguales* si tienen exactamente los mismos elementos. Por ejemplo, los conjuntos $P=\{2,4,8,16,32,64,128,256\}$ y $Q=\{x \mid x=2^n, \quad n\in N, \quad n\le 8\}$ son iguales.

Existen conjuntos notables que tienen nombres específicos:

- Conjunto *vacío*. Es aquel que no posee elementos y se representa como ϕ o como $\{\ \}$. Por ejemplo:
  $L=\{x \mid x\ es\ un\ pez\ volador\}=\phi$
- Conjunto *finito*. Es aquel cuyos elementos pueden ser contados. Por ejemplo:
  $Y=\{x \mid x\ es\ una\ colonia\ de\ la\ Ciudad\ de\ México\}$
- Conjunto *infinito*. Es aquel cuyos elementos no pueden contarse. Por ejemplo:
  $Z=\{\cdots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots\}$

- *Subconjunto*. Si cada elemento de un conjunto B es también un elemento del conjunto A, se dice que B es subconjunto de A. Es decir, es un conjunto contenido en otro conjunto. Se denota como $B \subset A$. Por ejemplo:
  Si $M = \{2,4,5,7,9,11,13,22,40\}$, $I = \{2,4,5,9\}$ y $N = \{6,13,22\}$, entonces $I \subset M$ y $N \not\subset M$.

Como puede deducirse, el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto: si A es un conjunto cualquiera, entonces $\phi \subset A$

- Conjunto *universal*. Es aquel conjunto que posee a todos los elementos bajo consideración y se representa como U. Esto implica que cualquier conjunto es subconjunto del conjunto universal. Por ejemplo:
  Si $U = \{x \mid x \text{ son los días de la semana}\}$ y $W = \{lunes, viernes\}$, entonces $W \subset U$

El conjunto ordenado de los números naturales, $N = \{1,2,3,4,5,6,\cdots\}$, es el ejemplo básico de un conjunto infinito. Contar es el proceso de poner en correspondencia *biunívoca* (uno a uno) los elementos de un conjunto, con algún subconjunto ordenado de N. Por ejemplo, el siguiente conjunto posee cinco elementos.

$$\begin{array}{rccccc} X = \{ & \rhd, & \Diamond, & \Delta, & \lhd, & \nabla \} \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

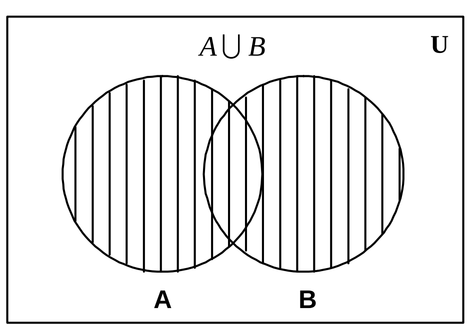
La *cardinalidad* de un conjunto A es el número de elementos que posee. Se denota como $\eta(A)$. Por definición, la cardinalidad del conjunto vacío es cero.

Ejemplos.
Si $K = \{aire, agua, tierra, fuego\}$, $\eta(K) = 4$
Si $J = \{Seúl, Barcelona, Atlanta, Sidney, Atenas, Beijing\}$, $\eta(J) = 6$

I.1.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

- La *unión* de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B. Se denota como: $A \cup B$.

Formalmente, se define como: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$. Esto significa que a los elementos del conjunto A se le añaden, sin repetir, los del conjunto B. Gráficamente:

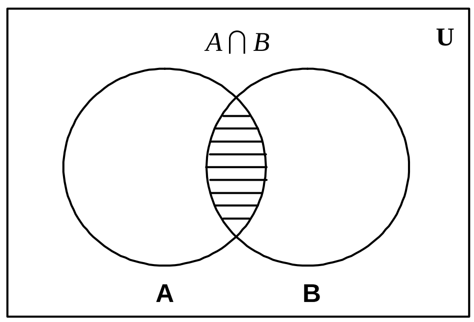


Ejemplo.
Dados los siguientes conjuntos:
$A=\{azul, amarillo, naranja, rojo, rosa, verde\}$
$B=\{azul, café, lila, morado, rojo, verde, gris\}$
Obtener $A\cup B.$

Solución:
$A\cup B=\{azul, amarillo, naranja, rojo, rosa, verde, café, lila, morado, gris\}$

- La *intersección* de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a $B.$ Se denota como: $A\cap B.$

Formalmente, se define como: $A\cap B=\{x \mid \quad x\in A \quad y \quad x\in B\}$. Esto significa que x es el conjunto de los elementos comunes de A y B. Gráficamente:



Ejemplo.
Sean los siguientes conjuntos:
$A=\{mango, pera, ciruela, naranja, melón, uva\}$
$B=\{piña, melón, sandía, fresa, pera, durazno, uva\}$
Obtener $A\cap B.$

Solución:
$A\cap B=\{pera, melón, uva\}$

La *cardinalidad* del conjunto $A\cup B$ está dada por $\eta(A\cup B)=\eta(A)+\eta(B)-\eta(A\cap B).$

Ejemplo
Dados los conjuntos anteriores, comprobar que $\eta(A\cup B)=\eta(A)+\eta(B)-\eta(A\cap B)$

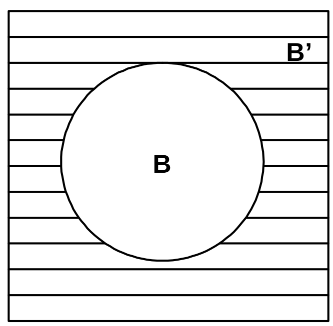
Solución.
Contando los elementos de los conjuntos se tiene que: $\eta(A\cup B)=10$, $\eta(A)=6$ y $\eta(B)=7$
$A\cap B=\{azul, rojo, verde\} \quad \Rightarrow \quad \eta(A\cap B)=3$
Aplicando la expresión: $\eta(A\cup B)=6+7-3=10$, lo cual coincide con el primer resultado.

Cuando dos conjuntos A y B no tienen elementos en común, su intersección es el vacío. En este caso se dice que los conjuntos A y B son *ajenos* o *disjuntos*, es decir : $A \cap B = \phi$.

Ejemplo.
Estos conjuntos son ajenos:
$A = \{Asia, Europa, América, Oceanía, Africa\}$
$B = \{Mercurio, Venus, Marte, Saturno, Neptuno\}$
ya que $A \cap B = \phi$.

- Si B es un subconjunto de A, se define como el *complemento* de B en A al conjunto de elementos que pertenecen a A pero no a B. Se representa como B' o también como B^c.

Formalmente, se define como: $B' = \{x \mid x \in A \quad y \quad x \notin B\}$. Esto significa que las x son los elementos que están fuera del conjunto B. Gráficamente:



Ejemplo.
Sean los siguientes conjuntos:
$A = \{Cozumel, La\ Paz, Huatulco, Ixtapa, Cancún, Mazatlán, Veracruz, Puerto\ Vallarta, Manzanillo\}$
$B = \{Cozumel, La\ Paz, Cancún, Manzanillo\}$
Obtener B'.

Solución.
Dado que $B \subset A$, entonces $B' = \{Huatulco, Ixtapa, Mazatlán, Veracruz, Puerto\ Vallarta\}$

De acuerdo a las definiciones de complemento, de unión y de intersección, se advierte que:

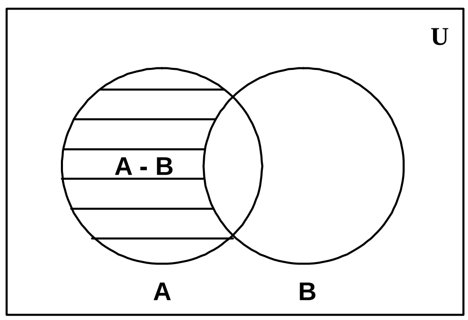
$(A')' = A$
$\phi' = U$
$U' = \phi$
$A \cup A' = U$
$A \cap A' = \phi$

- La *diferencia* de los conjuntos $A - B$ (en ese orden) es el conjunto de los elementos que sólo pertenecen a A.

Ejemplo.
Sean los siguientes conjuntos:
$A=\{\alpha,\beta,\delta,\gamma,\eta,\lambda,\mu,\kappa,\rho\}$
$B=\{\alpha,\gamma,\omega,\lambda,\theta,\rho,\psi\}$
Obtener $A-B$ y $B-A$.

Solución:
$A-B=\{\beta,\delta,\eta,\mu,\kappa\}$
$B-A=\{\omega,\theta,\psi\}$

Formalmente, se define como: $A-B=\{x \mid \quad x\in A \quad y \quad x\notin B\}$. Esto significa que la diferencia de dos conjuntos sólo contempla a los elementos del primer conjunto y que no pertenecen al segundo. Gráficamente:



Del diagrama anterior se deducen las siguientes expresiones:

a) $A-A=\phi$
b) $A-\phi=A$
c) $A-B=A\bigcap B'=B'-A'$
d) $A-B=\phi,$ si y sólo si $A\subset B$
e) $A-B=B-A,$ si y sólo si $A=B$
f) $A-B=A,$ si y sólo si $A\bigcap B=\phi$
g) $A-B\subset A$
h) Los conjuntos $A-B,\ \ A\bigcap B$ y $B-A$ son mutuamente ajenos, es decir, la intersección de dos de estos conjuntos es el vacío.

Ejemplo.
Dados los siguientes conjuntos:
$U=\{3,6,9,12,15,18,21,24,27\}$, $A=\{3,6,12,18,21,27\}$, $B=\{3,9,12,21,24,27\}$, $C=\{3,12,24\}$, $D=\{3,6,12,18,21,27\}$, $E=\{6,15,18\}$
Se cumple que:

Solución:
a) $A-A=\phi$, ya que poseen los mismos elementos.
b) $A-\phi=A$, el vacío al no tener elementos al restarlo del primer conjunto representa al mismo conjunto.

c) $A' = \{9, 15, 24\}$

$B' = \{6, 15, 18\}$

$A - B = \{6, 18\}$

$A \cap B' = \{6, 18\}$

$B' - A' = \{6, 18\}$

d) Como $C \subset B$, se tiene que:

$C - B = \phi$

e) Como $A = D$, se tiene que:

$A - D = D - A = \phi$

f) Como $B \cap E = \phi$ se tiene:

$B - E = B$

g) $A - B = \{6, 18\} \subset A$

h) $A \cap B = \{3, 12, 21, 27\}$

$B - A = \{9, 24\}$

$A - B = \{6, 18\} \subset A$

$(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$

$(A - B) \cap (B - A) = \phi$

$(A \cap B) \cap (B - A) = \phi$

Ejemplo.
Sean los siguientes conjuntos:

$U = \{x \mid x = n + 1, \quad n \in N, \quad n \le 15\}$

$J = \{x \mid x = 3n + 1, \quad n \in N, \quad n < 6\}$

$L = \{x \mid x = 2n + 2, \quad n \in N, \quad n \le 7\}$

Obtener:

a) $J \cup L$	b) $J \cap L$	c) J'	d) L'
e) $J - L$	f) $L - J$	g) $J' \cup L$	h) $J \cap L'$
i) $L' \cap J'$	j) $L' - J'$	k) $(J \cup L)'$	l) $(J \cap L)'$

Solución:
Expresando los conjuntos por extensión:

$U = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$

$J = \{4,7,10,13,16\}$

$L = \{4,6,8,10,12,14,16\}$

a) $J \cup L = \{4,6,7,8,10,12,13,14,16\}$

b) $J \cap L = \{4,10,16\}$

c) $J' = \{2,3,5,6,8,9,11,12,14,15\}$

d) $L' = \{2,3,5,7,9,11,13,15\}$

e) $J - L = \{7,13\}$

f) $L - J = \{6,8,12,14\}$

g) $J'\cup L=\{2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,14,15,16\}$
h) $J\cap L'=\{7,13\}$
i) $L'\cap J'=\{2,3,5,9,11,15\}$
j) $L'-J'=\{7,13\}$
k) $(J\cup L)'=\{2,3,5,9,11,15\}$
l) $(J\cap L)'=\{2,3,5,6,7,8,9,11,12,13,14,15\}$

I.1.3 PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS

Las propiedades más notables que rigen las operaciones con conjuntos son:

1. Propiedades de identidad:

$$A\cup\phi=A$$
$$A\cup U=U$$
$$A\cap\phi=\phi$$
$$A\cap U=A$$

2. Propiedades de idempotencia:

$$A\cup A=A$$
$$A\cap A=A$$

3. Propiedades asociativas:

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

4. Propiedades conmutativas:

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

5. Propiedades distributivas:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

I.1.4 LEYES DE DE MORGAN

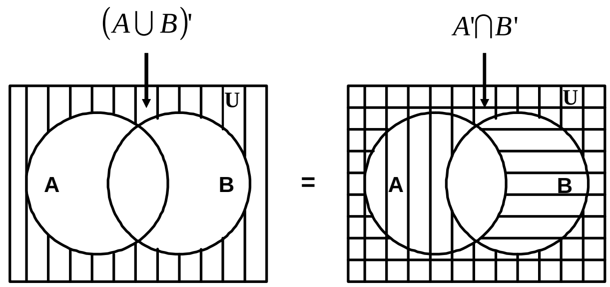
Las Leyes de De Morgan permiten simplificar la unión e intersección de complementos:

1. *El complemento de la unión de dos conjuntos es la intersección de sus complementos*:

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

Utilizando diagramas se tiene:

En el diagrama de la izquierda, $A \cup B$ viene dada por la región en blanco y $(A \cup B)'$ está representado por el área sombreada verticalmente. Por su parte en el diagrama de la derecha, A' es la región sombreada horizontalmente, B' es el área sombreada verticalmente, por lo que $A' \cap B'$ está representado por la superficie cuadriculada:

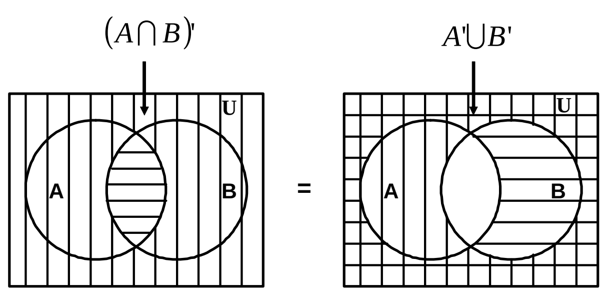


2. *El complemento de la intersección de dos conjuntos es la unión de sus complementos*:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Utilizando diagramas se tiene:

En el diagrama de la izquierda, $A \cap B$ está dada por la región sombreada horizontalmente y $(A \cap B)'$ está representado por el área sombreada verticalmente. Por su parte, en el diagrama de la derecha, A' es la región sombreada horizontalmente, B' es el área sombreada verticalmente, por lo que $A' \cup B'$ está representado por aquella superficie que no es blanca:



Ejemplo.
Dados los siguientes conjuntos:
$U = \{ \triangleright, \rightarrow, \lozenge, \&, \#, \perp, \nabla, \triangleleft, \$, \Delta, *, \Omega \}$

$A=\{\triangleright,\Diamond,\perp,\nabla,\$,*\}$
$B=\{\rightarrow,\Diamond,\#,\nabla,*,\Omega\}$
Comprobar las leyes de De Morgan:

Solución:
$A\bigcup B=\{\triangleright,\rightarrow,\Diamond,\#,\perp,\nabla,\$,*,\Omega\}$
$A\bigcap B=\{\Diamond,\nabla,*\}$
$A'=\{\rightarrow,\&,\#,\triangleleft,\Delta,\Omega\}$
$B'=\{\triangleright,\&,\perp,\triangleleft,\$,\Delta\}$
$(A\bigcup B)'=\{\&,\triangleleft,\Delta\} \qquad \_(1)$
$A'\bigcap B'=\{\&,\triangleleft,\Delta\} \qquad \_(2)$
Como $(1)=(2) \quad \Rightarrow \quad (A\bigcup B)'=A'\bigcap B'$
$(A\bigcap B)'=\{\triangleright,\rightarrow,\&,\#,\perp,\triangleleft,\$,\Delta,\Omega\} \qquad \_(3)$
$A'\bigcup B'=\{\triangleright,\rightarrow,\&,\#,\perp,\triangleleft,\$,\Delta,\Omega\} \qquad \_(4)$
Como $(3)=(4) \quad \Rightarrow \quad (A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$

I.2 LÓGICA MATEMÁTICA

La Lógica estudia la forma del razonamiento. La Lógica Matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la Lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no valido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en Matemáticas para demostrar teoremas, sin embargo, se usa en forma constante para realizar cualquier actividad en la vida.

I.2.1 DEFINICIÓN Y CLASES DE PROPOSICIONES

Una *proposición* o enunciado es una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez. Toda proposición consta de tres partes: un sujeto, un verbo y un complemento referido al verbo. La proposición es un elemento fundamental de la Lógica Matemática.

A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas, y se explica el porqué algunos enunciados no son proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha.

Ejemplos.
p: México se encuentra en Europa.
q: $15-6=9$
r: $2x-3>7$
s: Los precios de los teléfonos celulares bajarán a fin de año.
t: Hola ¿cómo estás?
w: ¡Cómete esa fruta!

Los enunciados **p** y **q** pueden tomar un valor de falso o verdadero, por lo tanto, son proposiciones validas. El inciso **r** también es una proposición valida, aunque el valor de falso o verdadero depende del valor asignado a la variable x en determinado momento. La proposición del inciso **s** también esta perfectamente expresada aunque para decir si es falsa o verdadera se tendría que esperar a que terminara el año. Sin embargo, los enunciados **t** y **w** no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, uno de ellos es un saludo y el otro es una orden.

En general, las proposiciones pueden ser:

- *Simples* si sólo tienen un sujeto, un verbo y un complemento. En caso contrario, son proposiciones *Compuestas*.
- *Cerradas* si tienen determinado el sujeto. *Abiertas* si no lo tienen determinado.
- *Afirmativas* o *Negativas*. Según lo afirmen o nieguen.
- *Verdaderas* o *Falsas* según correspondan o no a la realidad.

Ejemplos.

h: "Ana come pizza y bebe refresco", es una proposición compuesta, cerrada y afirmativa.
j: "Ella no nada muy rápido", es una proposición simple, abierta y negativa.
k: “Cuernavaca no está al norte del D.F. y no hace frío", es una proposición compuesta, cerrada, negativa y verdadera.
l: $7+3=10$ es una proposición simple, cerrada, afirmativa y verdadera.
m: $x^2 \neq x-2$ es una proposición simple, abierta y negativa.
n: $a+b=6$ es una proposición compuesta, abierta y afirmativa.

I.2.2 CONECTIVOS LÓGICOS EN PROPOSICIONES COMPUESTAS

Existen conectivos u operadores lógicos que permiten formar proposiciones compuestas, es decir, formadas por varias proposiciones. Los operadores o conectores básicos son:

- *Conjunción* (operador *and*)

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Se le conoce como multiplicación lógica y su símbolo es $\wedge$ (and).

Ejemplo.
Sea el siguiente enunciado: "Voy al cine cuando hay una buena película y cuando tengo dinero "
Sean:
p: Voy al cine.
q: Hay una buena película.
r: Tengo dinero.
De tal manera que la representación del enunciado anterior usando simbología lógica es como sigue:
p = **q**$\wedge$**r**

Su tabla de verdad es como sigue:

q	**r**	**p$\wedge$r**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Donde.
1 = verdadero
0 = falso

En la tabla anterior el valor de **q**=1 significa que hay una buena película, **r**=1 significa que tengo dinero y **p**=**q**$\wedge$**r**=1 significa que voy ir al cine. Se puede notar que con cualquiera de las dos proposiciones que valga cero implica que no asisto al cine.

- *Disyunción* (operador *or*)

Con este operador se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera. Se conoce como suma lógica y su símbolo es $\vee$ (or).

Ejemplo.
Sea el siguiente enunciado: "Para ir a Toluca puedo tomar la carretera federal o tomar la autopista de cuota"
Sean:
p: Ir a Toluca.
q: Tomar la carretera federal.
r: Tomar la autopista de cuota.

q	**r**	**p$\vee$r**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

En la tabla anterior el valor de **q**=1 significa tomar la carretera federal, **r**=1 significa tomar la autopista de cuota y **p**=**q**$\vee$**r**=1 significa ir a Toluca. Se puede notar que con cualquiera de las dos proposiciones que valga uno implica que llego a Toluca.

- *Negación* (operador *not*)

Su función es *negar* la proposición. Esto significa que sí alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador not se obtendrá su negación (falso) y viceversa. Este operador se indica por medio del símbolo **'**.

Ejemplo.
Sea el siguiente enunciado: "El león es el rey de la selva"
Sean:
p: El león es el rey de la selva.
p': El león no es el rey de la selva.

Su tabla de verdad es como sigue:

p	**p**'
1	0
0	1

En la tabla anterior el valor de **p**=1 significa que el león es el rey de la selva, y **p**=0 significa que el león no lo es[1].

Ejemplo.
Sean las proposiciones:
p: Ya es tarde.
q: Tengo que dormirme.
r: Me levantaré temprano.
El enunciado: "Ya es tarde y tengo que dormirme o no me levantaré temprano". Se puede representar simbólicamente de la siguiente manera: **p**$\wedge$**q**$\vee$**r'**

[1] Además de los operadores básicos (And, Or y Not) existe el operador Xor, cuyo funcionamiento es semejante al operador Or con la diferencia de que su resultado es verdadero solamente si una de las proposiciones es cierta, y cuando ambas son verdad, el resultado es falso. Por otro lado, con ayuda de los operadores básicos se pueden formar los operadores compuestos Nand (combinación de los operadores Not y And), Nor (combina operadores Not y Or) y Xnor (resultado de Xor y Not).

I.2.3 PROPOSICIONES CONDICIONALES

Una *implicación* o proposición *condicional*, es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuesta) p y q. Se indica de la siguiente manera:

p→q (se lee "si **p** entonces **q**")

Ejemplo.
Un profesionista dice "Si ahorro me podré comprar una casa en tres años ". Una declaración como esta se conoce como condicional.
Sean:
p: Ahorro.
q: Podrá comprar una casa en tres años .
De tal manera que el enunciado se puede expresar como: **p→q**
Su tabla de verdad es de la siguiente manera:

p	q	p→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:
Analizando si el profesionista mintió con la afirmación del enunciado anterior: Cuando **p**=1 significa que ahorró y **q**=1 que se compró la casa en tres años, por lo tanto **p**→q =1 (el profesionista dijo la verdad). Cuando **p**=1 y **q**=0 significa que **p→q** =0, el profesionista mintió, ya que ahorró y no se compró la casa. Cuando **p**=0 y **q**=1 significa que aunque no ahorró se compró la casa (ya tenía los recursos), así que no mintió, de tal forma que **p→q** =1. Cuando **p**=0 y **q**=0 se interpreta que aunque no ahorró tampoco se compró la casa, por lo tanto **p→q** =1 ya que tampoco mintió.

I.2.4 PROPOSICIÓN BICONDICIONAL

Sean **p** y **q** dos proposiciones. Una *doble implicación* o proposición es *bicondicional* cuando **p** es verdadera si y solo si **q** es también verdadera. O bien **p** es falsa si y sólo si **q** también lo es. Se indica de la siguiente manera:

p↔q (se lee "**p** si y sólo si **q**")

Ejemplo.
Sea el siguiente enunciado: "Una persona puede votar, si y sólo si, tiene credencial de elector"
Donde:
p: Una persona puede votar.
q: Tiene credencial de elector.
Su tabla de verdad es.

p	q	p↔q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:
Cuando **p**=1 significa que una persona puede votar y **q**=1 que tiene credencial, al ser esto cierto, **p**→q =1. Cuando **p**=1 y **q**=0 significa que **p→q** =0, una persona puede no votar, ya que no posee la credencial. Cuando **p**=0 y **q**=1 significa que una persona no puede votar aunque tenga credencial (por ejemplo los

residentes en el extranjero), esto es que **p**→**q** =0. Cuando **p**=0 y **q**=0 se interpreta como que ni puede votar ni tiene credencial, por lo tanto es cierto **p**→**q** =1.

Ejemplo.
Representar simbólicamente el enunciado: "Si no pago la luz, entonces me cortarán la corriente eléctrica. Y Si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Y Si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si y sólo si soy desorganizado"

Solución
p: Pago la luz.
q: Me cortarán la corriente eléctrica.
r: Me quedaré sin dinero.
s: Pediré prestado.
t: Pagar la deuda.
w: Soy desorganizado.

$$(p'\rightarrow q)\wedge[p\rightarrow(r\vee s)]\wedge[(r\wedge s)\rightarrow t']\leftrightarrow w$$

El número de líneas de la tabla de verdad depende del número de variables de la expresión y se puede calcular por medio de la siguiente formula.

$$\text{No de líneas} = 2^n$$

donde n es el número de variables distintas.

Ejemplo.
Dada la siguiente proposición: [(**p**→**q**)∨(**q**'∧**r**)]↔(**r**→**q**).
elaborar su tabla de verdad.

Solución.

p	q	r	q'	p→q	(q'∧r)	(p→q)∨ (q'∧r)	r→q	[(p→q)∨(q'∧r)]↔(r→q)
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

I.2.5 TAUTOLOGÍA, EQUIVALENCIA Y CONTRADICCIÓN

Tautología es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es la proposición *contrapositiva* cuya tabla de verdad se indica a continuación.

p	q	p'	q'	p→q	q'→p'	(p→q)↔(q'→p')
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Nótese que en las tautologías para todos los valores de verdad el resultado de la proposición es siempre uno. Las tautologías son muy importantes en Lógica Matemática ya que se consideran leyes en las cuales se puede apoyar para realizar demostraciones.

Se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente *equivalentes*. Si coinciden sus resultados para los mismo valores de verdad. Se indican como $\mathbf{p}\equiv\mathbf{q}$.

En el ejemplo anterior, se puede observar que las columnas de $(\mathbf{p}\rightarrow\mathbf{q})$ y $(\mathbf{q}'\rightarrow\mathbf{p}')$ son iguales para los mismos valores de verdad, por lo tanto se puede establecer que $(\mathbf{p}\rightarrow\mathbf{q}) \equiv (\mathbf{q}'\rightarrow\mathbf{p}')$

Contradicción es aquella proposición que siempre es falsa para todos los valores de verdad, una de las mas usadas y mas sencilla es $\mathbf{p}\wedge\mathbf{p}'$. Como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	**p'**	**p∧p'**
0	1	0
1	0	0

Ejemplo.
Si se tiene **p**: “El coche es verde”, la proposición $\mathbf{p}\wedge\mathbf{p}'$ equivale a decir que "El coche es verde y el coche no es verde". Por lo tanto se esta contradiciendo, es decir, es una *falacia*.

I.2.6 LEYES NOTABLES EN LÓGICA

Las leyes de lógica más notables son las que se enlistan a continuación:

1.- Ley de doble negación

$\mathbf{p}''\leftrightarrow\mathbf{p}$

2.- Leyes de idempotencia

$(\mathbf{p}\vee\mathbf{p}) \leftrightarrow \mathbf{p}$
$(\mathbf{p}\wedge\mathbf{p}) \leftrightarrow \mathbf{p}$

3.- Leyes asociativas

$[(\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\vee\mathbf{r}] \leftrightarrow [\mathbf{p}\vee(\mathbf{q}\vee\mathbf{r})]$
$[(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})\wedge\mathbf{r}] \leftrightarrow [\mathbf{p}\wedge(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r})]$

4.- Leyes conmutativas

$(\mathbf{p}\vee\mathbf{q}) \leftrightarrow (\mathbf{q}\vee\mathbf{p})$
$(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}) \leftrightarrow (\mathbf{q}\wedge\mathbf{p})$
$(\mathbf{p}\leftrightarrow\mathbf{q}) \leftrightarrow (\mathbf{q}\leftrightarrow\mathbf{p})$

5.- Leyes distributivas

$[\mathbf{p}\vee(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r})] \leftrightarrow [(\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\wedge(\mathbf{p}\vee\mathbf{r})]$
$[\mathbf{p}\wedge(\mathbf{q}\vee\mathbf{r})] \leftrightarrow [(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})\vee(\mathbf{p}\wedge\mathbf{r})]$

6.- Leyes de De Morgan

$(\mathbf{p}\vee\mathbf{q})' \leftrightarrow (\mathbf{p}'\wedge\mathbf{q}')$
$(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})' \leftrightarrow (\mathbf{p}'\vee\mathbf{q}')$

1.2.7 MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Todo enunciado puede ser planteado en términos de teoremas. Un teorema por lo general es resultado de un planteamiento de un problema, que normalmente presenta el siguiente formato:

$$(\mathbf{p_1} \wedge \mathbf{p_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p_n}) \rightarrow \mathbf{q}$$

Como se establece $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$, ··· $\mathbf{p_n}$ son hipótesis (o premisas) derivadas del mismo problema y que se consideran válidas. Pero además deberán conectarse con el operador And ($\wedge$), lo cual implica que $\mathbf{p_1}$ es cierta y ($\wedge$) $\mathbf{p_2}$ es verdad y ($\wedge$)...... y $\mathbf{p_n}$ también es cierta entonces ($\rightarrow$) la conclusión (**q**) es cierta. Para realizar la demostración formal del teorema se deberá partir de las hipótesis, y después obtener una serie de pasos que también deben ser válidos, ya que son producto de reglas de inferencia. Sin embargo no solamente las hipótesis y reglas de inferencia pueden aparecer en una demostración formal, sino también tautologías conocidas. En el teorema anterior cada uno de los pasos $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$, ··· $\mathbf{p_n}$ son escalones que deberán alcanzarse hasta llegar a la solución.

Lo mismo ocurre con todo tipo de problemas que se nos presentan en la vida, antes de llegar a la solución debemos alcanzar ciertas metas ($\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$, ··· $\mathbf{p_n}$) hasta llegar al objetivo o conclusión (**q**). Pero una vez que se logra el objetivo se deben plantear nuevos objetivos que permitan la superación.

Los métodos de demostración más conocidos son los siguientes:

- *Demostración por el método directo*

El método de demostración directa parte de la proposición **p**, que se supone verdadera, y deducir de ella una nueva proposición **q** que se pueda ver que es verdadera como resultado de que **p** lo es. Es importante resaltar que las proposiciones deducidas de **p** no deben ser hechas de cualquier modo, deben estar enfocadas hacia la última proposición obtenida.

El camino que se debe seguir para llevar a cabo una demostración formal usando el método directo significa que si se sabe que $\mathbf{p_1}$ es verdadera, $\mathbf{p_2}$ es verdadera,..., y $\mathbf{p_n}$ también es verdadera, entonces se sabe que **q** es verdadera.

Prácticamente todos los teoremas matemáticos están compuestos por implicaciones del tipo:

$$(\mathbf{p_1} \wedge \mathbf{p_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{p_n}) \rightarrow \mathbf{q}$$

donde las $\mathbf{p_i}$ son llamadas hipótesis o premisas, y **q** es llamada conclusión. "Demostrar el teorema", es demostrar que la implicación es una tautología. Nótese que no se trata de demostrar que **q** (la conclusión) es verdadera, sino solamente que **q** es verdadera si todas las $\mathbf{p_i}$ son verdaderas.

- *El método de demostración indirecta*

El método de demostración indirecta consiste en proceder al revés. Se fija la atención primeramente en **q**, es decir en la afirmación a la que se quiere llegar.

Ubicada la premisa **p**, se va tratando de buscar situaciones intermedias $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$, ··· $\mathbf{p_n}$ de las que **q** se podría deducir. Se identifica si alguna de estas podría estar relacionada con la situación **p**, se podría deducir de ella. Cuando se encuentra, se verifica que el camino inverso que se ha encontrado, ahora de **p** a **q**, es correcto.

- *Método de demostración por reducción al absurdo*

En el método de demostración de reducción al absurdo, se debe empezar suponiendo que **p** es verdadera, al igual que se hacía en el método de demostración directa. Ahora, sin embargo, para llegar a la conclusión buscada, a saber, que **q** es verdadera se puede proceder haciendo una pregunta muy simple: "¿Por qué no puede **q** ser falsa?". Después de todo, si **q** tiene que ser verdadera, debe haber alguna razón por la que no pueda ser falsa. El objetivo del método de demostración por reducción al absurdo es, precisamente, descubrir esa razón. La idea es suponer que **p** es verdadera y **q** falsa y ver que no puede ocurrir esto.

En la práctica la demostración por reducción al absurdo inicia considerando como hipótesis **q**' y finaliza cuando el proceso de demostración obtiene dos proposiciones que se contradicen una a la otra.

Ejemplo.
Demostrar por reducción al absurdo que la raíz cuadrada de un número natural es natural o irracional.

Solución.
Sean los números naturales A y B primos entre sí con $B \neq 1$

Suponiendo un número racional de la forma $\sqrt{n} = \frac{A}{B}$

Si se eleva al cuadrado: $n = \frac{A^2}{B^2}$

Resulta un absurdo puesto que el miembro izquierdo es natural y el miembro derecho es racional e irreducible. Por lo tanto la raíz cuadrada de un número natural no es racional.

- *La demostración por contraposición*

El método de la demostración por contraposición, tiene la ventaja de que se va a dirigir hacia una contradicción concreta. En la demostración por contraposición, al igual que la demostración por reducción al absurdo, se supone que tanto **p** como **q'** son verdaderas. En el método por contraposición, sin embargo, no se parte de **p** y **q'**, sino que se empieza a trabajar solamente con **q'** y el objetivo es llegar a que **p** es falsa, con lo que ya se ha llegado a una contradicción ¿qué mejor contradicción? ¿cómo puede ser **p** a la vez verdadera y falsa?

I.3 INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Dentro de las Matemáticas existen proposiciones tanto generales como particulares.

Ejemplos de proposiciones generales, son las siguientes:

p: "Todos los niños de México tienen derecho a la educación".
q: "En todo paralelogramo las diagonales se cortan en el punto medio de ambas".
r: "Todos los números que terminan en cero son divisibles por 5".

Algunas de las proposiciones particulares que se pueden deducir de éstas son respectivamente:

s: "Beto tiene derecho a la educación".
t: "Las diagonales del paralelogramo ABCD se cortan en el punto medio de ambas".
u: "140 es divisible por 5".

El paso de las proposiciones generales a las particulares se denomina *deducción*.

Ejemplos:

p: "Todos los niños en México tienen derecho a la educación".
v: "Beto es niño mexicano".
s: "Beto tiene derecho a la educación".

Se observa que la proposición **s** ha sido deducida de la proposición **p** mediante la proposición **v**.

Ahora bien, la forma lógica de razonamiento que parte de proposiciones particulares y llega a las generales se denomina *inducción*. La inducción puede llevar a conclusiones verdaderas o, a conclusiones falsas.

Ejemplos.

1) **p**: "140 es divisible por 5".
q: "Todos los números que terminan en cero son divisibles por 5".
De la proposición particular **p** se ha obtenido la proposición **q**, que es verdadera.

2) **u**: "140 es divisible por 5".
w: "Todos los números de tres dígitos son divisibles por 5".
De la proposición particular **u** se ha obtenido la proposición **w** que es falsa.

La pregunta que surge ahora es: ¿cómo debe de emplearse la inducción en las Matemáticas para llegar siempre a conclusiones verdaderas?

Los ejemplos considerados permiten concluir fácilmente que una proposición puede ser válida en una serie de casos particulares y no serlo en general.

Ahora surge otra pregunta. Se tiene una proposición válida en varios casos particulares y es imposible analizar todos los casos. ¿Cuándo se puede afirmar que esta proposición es válida en general?
La respuesta se logra aplicando un razonamiento especial conocido como *método de inducción matemática*:

Toda demostración que se basa en el principio de inducción matemática se denomina "demostración por inducción". Esto consta de verificar que se cumplan las siguientes condiciones:

- La proposición es válida para $n=1$
- La proposición es válida para $n=k+1$ si lo es para $n=k$, donde k es un número arbitrario

Si estas condiciones se cumplen se puede afirmar que la proposición es válida para todo número natural.

Para todo fin práctico, el proceso de demostración de una identidad enunciada para todos los números naturales consta de tres pasos:

1. Verificar el cumplimiento de la identidad para $n=1$
2. Establecer la identidad para $n=k$
3. Demostrar, mediante procesos algebraicos, que también es válida para $n=k+1$.

Ejemplos.
Aplicando el principio de inducción matemática, demostrar las siguiente identidades:

1) $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Solución:
Se verifica la validez para $n=1$:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Se establece para $n=k$:

$$1+2+3+4+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \qquad \_(1)$$

Ahora, para $n=k+1$ se tiene:

$$1+2+3+4+\cdots+k+1=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad \_(2)$$

sumando $k+1$ en ambos miembros de la expresión (1):

$$1+2+3+4+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

expresando convenientemente:

$$1+2+3+4+\cdots+k+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$

factorizando $\frac{(k+1)}{2}$:

$$1+2+3+4+\cdots+k+1=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad \_(3)$$

como $(2)=(3)$ queda demostrada la validez para $n=k+1$.

2) $1+3+5+7+\cdots+2(n-1)=n^2$

Solución:

Se verifica la validez para $n=1$:

$1=1^2$

Se establece para $n=k$:

$$1+3+5+7+\cdots+2(k-1)=k^2 \qquad \_(1)$$

Ahora, para $n=k+1$ se tiene:

$$1+3+5+7+\cdots+2[(k+1)-1]=(k+1)^2 \qquad \_(2)$$

sumando $[2(k+1)-1]$ en ambos miembros de la expresión (1):

$$1+3+5+7+\cdots+2(k-1)+2[(k+1)-1]=k^2+[2(k+1)-1]$$

$$1+3+5+7+\cdots+2(k-1)+2[(k+1)-1]=k^2+2k+2-1$$

$$1+3+5+7+\cdots+2(k-1)+2[(k+1)-1]=k^2+2k+1$$

factorizando el trinomio:

$$1+3+5+7+\cdots+2(k-1)+2[(k+1)-1]=(k+1)^2 \qquad \_(3)$$

como $(2)=(3)$ queda demostrada la validez para $n=k+1$.

3) $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Solución:

Se verifica la validez para $n=1$:

$$1^3=\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2=\left(\frac{2}{2}\right)^2=1^2=1$$

Se establece para $n=k$:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 \qquad \_(1)$$

Ahora, para $n=k+1$ se tiene:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right]^2=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 \qquad \_(2)$$

sumando $(k+1)^3$ en ambos miembros de la expresión (1):

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$

expresando convenientemente:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{[k(k+1)]^2}{4}+\frac{4(k+1)^3}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

factorizando $\frac{(k+1)^2}{4}$:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4k+4\right]}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

expresando en términos de cuadrados:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 \qquad \_(3)$$

como $(2)=(3)$ queda demostrada la validez para $n=k+1$.

4) $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solución:

Se verifica la validez para $n=1$:

$$1^2=\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}=\frac{1(2)(3)}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Se establece para $n=k$:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \_(1)$$

Ahora, para $n=k+1$ se tiene:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad \_(2)$$

sumando $(k+1)^2$ en ambos miembros de la expresión (1):

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

expresando convenientemente:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

factorizando $(k+1)$:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[2k^2+k+6k+6]}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6}$$

factorizando el trinomio:

$$2k^2+7k+6=\frac{(2k)^2+2(7k)+2(6)}{2}=\frac{(2k)^2+7(2k)+12}{2}=\frac{(2k+4)(2k+3)}{2}=(k+2)(2k+3)$$

por lo tanto:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad \_(3)$$

como $(2)=(3)$ queda demostrada la validez para $n=k+1$.

5) $\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

Solución:

Se verifica la validez para $n=1$:

$$\frac{1}{1(2)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Se establece para $n=k$:

$$\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \qquad \_(1)$$

Ahora, para $n=k+1$ se tiene:

$$\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{(k+1)+1}=\frac{k+1}{k+2} \qquad \_(2)$$

sumando $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ en ambos miembros de la expresión (1):

$$\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

factorizando el trinomio:

$$\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

reduciendo:

$$\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2} \qquad \_(3)$$

como $(2)=(3)$ queda demostrada la validez para $n=k+1$.

6) $1(2)+3(4)+5(6)+\cdots+(2n-1)2n=\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{3}$

Solución:

Se verifica la validez para $n=1$:

$$1(2)=\frac{1(1+1)(4(1)-1)}{3}=\frac{1(2)(3)}{3}=\frac{6}{3}=2$$

Se establece para $n=k$:

$$1(2)+3(4)+5(6)+\cdots+(2k-1)2k=\frac{k(k+1)(4k-1)}{3} \qquad \_(1)$$

Ahora, para $n=k+1$ se tiene:

$$1(2)+3(4)+5(6)+\cdots+[2(k+1)-1]2(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1][4(k+1)-1]}{3}$$

$$1(2)+3(4)+5(6)+\cdots+[2(k+1)-1]2(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{3} \qquad \_(2)$$

sumando $[2(k+1)-1]2(k+1)$ en ambos miembros de la expresión (1):

$$1(2)+3(4)+5(6)+\cdots+(2k-1)2k+[2(k+1)-1]2(k+1)=\frac{k(k+1)(4k-1)}{3}+[2(k+1)-1]2(k+1)$$

$$1(2)+3(4)+5(6)+\cdots+(2k-1)2k+[2(k+1)-1]2(k+1)=\frac{k(k+1)(4k-1)+6(k+1)(2k+1)}{3}$$

factorizando $k+1$:

$$1(2)+3(4)+5(6)+\cdots+(2k-1)2k+[2(k+1)-1]2(k+1)=\frac{(k+1)[k(4k-1)+6(2k+1)]}{3}$$

$$1(2)+3(4)+5(6)+\cdots+(2k-1)2k+[2(k+1)-1]2(k+1)=\frac{(k+1)[4k^2-k+12k+6]}{3}$$

$$1(2)+3(4)+5(6)+\cdots+(2k-1)2k+[2(k+1)-1]2(k+1)=\frac{(k+1)[4k^2+11k+6]}{3}$$

factorizando el trinomio:

$$4k^2+11k+6=\frac{(4k)^2+4(11k)+4(6)}{4}=\frac{(4k)^2+11(4k)+24}{4}=\frac{(4k+8)(4k+3)}{4}=(k+2)(4k+3)$$

por lo tanto:

$$1(2)+3(4)+5(6)+\cdots+[2(k+1)-1]2(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{3} \qquad \_(3)$$

como $(2)=(3)$ queda demostrada la validez para $n=k+1$.