# LA DERIVADA

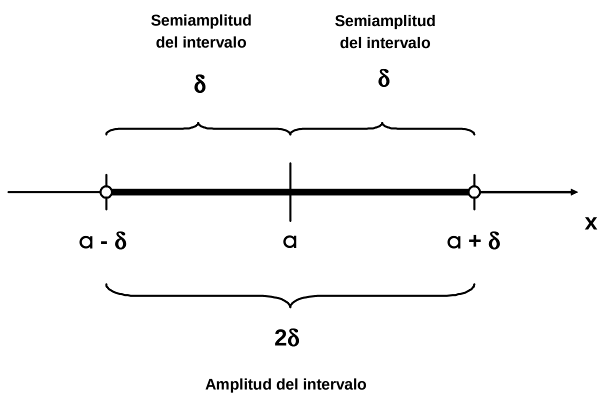
# UNIDAD III

## III.1 ENTORNOS

Se denomina *entorno* de un punto $a$ en $x$, al intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$ donde $\delta$ es la semiamplitud del intervalo.

El entorno de $a$, en notación de conjuntos puede escribirse como: $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$, o bien como un valor absoluto: $|x-a| < \delta$.

Gráficamente se representa así:



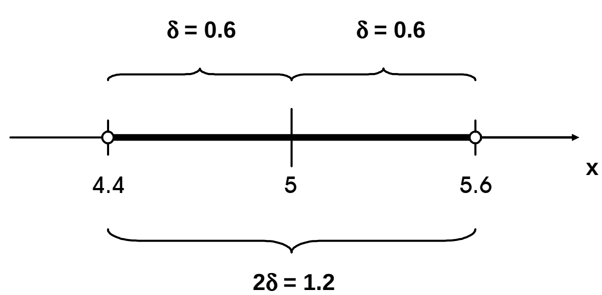

Ejemplo.
Obtener el entorno del punto $a=5$ y con la semiamplitud $\delta = 0.6$.

Solución.
Entorno de $a = (5-0.6, 5+0.6) = (4.4, 5.6)$

$= \{x \mid \quad 4.4 < x < 5.6\}$

$= |x-5| < 0.6$

esto significa que el entorno de $a$ son todos los valores de $x$ desde $4.4$ hasta $5.6$, pero sin incluir a los extremos. Verificando algunos valores dentro del entorno:




si $x = 4.7$:

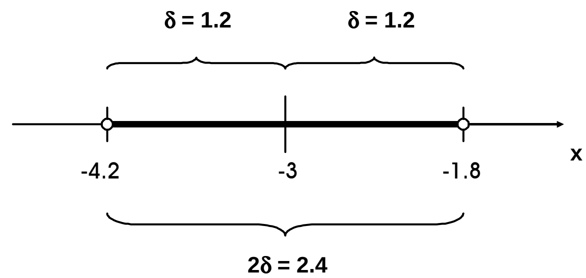
$|4.7-5| = |-0.3| = 0.3 < 0.6$

si $x = 5.42$:

$|5.42-5| = 0.42 < 0.6$

Ejemplo.
Obtener el entorno del punto $a=-3$ y con la semiamplitud $\delta=1.2$.

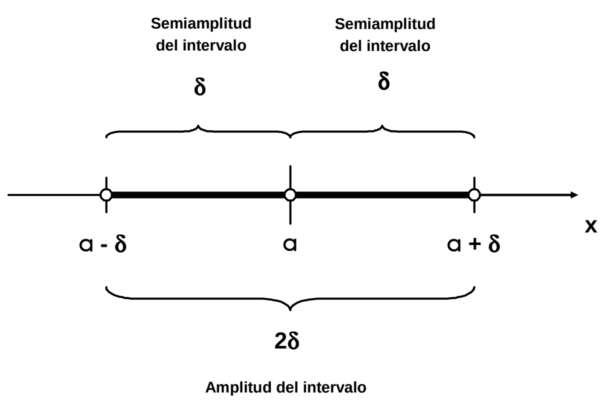
Solución.
Entorno de $a=(-3-1.2,-3+1.2)=(-4.2,-1.8)$
$=\{x \mid \ -4.2<x<-1.8\}$
$=|x+3|<1.2$
esto significa que el entorno de $a$ son todos los valores de $x$ desde $-4.2$ hasta $-1.8$, pero sin incluir a los extremos:
si $x=-3.8$:
$|-3.8+3|=|-0.8|=0.8<1.2$
si $x=-2$:
$|-2+3|=1<1.2$




Se define como *entorno reducido* de un punto $a$ en $x$ al entono que excluye al propio punto $a$. Es decir, es el intervalo abierto $(a-\delta,a+\delta)$ donde $x\neq a$.

El entorno reducido de $a$ también puede escribirse como: $\{x \mid \ a-\delta<x<a+\delta, \quad x\neq a\}$, o bien como: $0<|x-a|<\delta$.

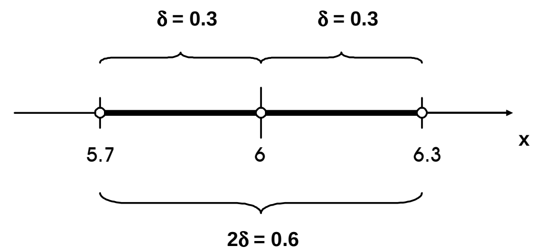
Gráficamente esto es:




Ejemplo.
Obtener el entorno reducido del punto $a=6$ y con la semiamplitud $\delta=0.3$

Solución.
Entorno reducido de $a=(6-0.3,6+0.3)=(5.7,6.3)$ si $x\neq 6$
$=\{x \mid \ 5.7<x<6.3, \quad x\neq 6\}$
$=0<|x-6|<0.3$

esto significa que el entorno reducido de $a$ son todos los valores de $x$ desde $5.7$ hasta $6.3$, quitando el $6$ y sin incluir a los extremos:




si $x = 6.15$:

$$|6.15 - 6| = 0.15 < 0.3$$

si $x = 5.93$:

$$|5.93 - 6| = |-0.07| = 0.07 < 0.3$$

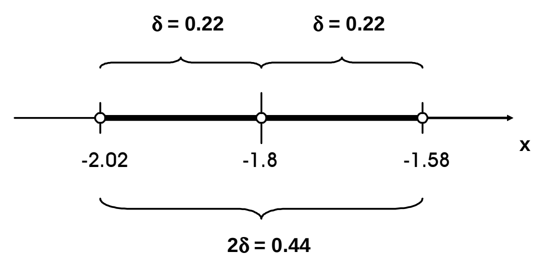
Ejemplo.
Obtener el entorno reducido del punto $a = -1.8$ y con la semiamplitud $\delta = 0.22$.

Solución.
Entorno reducido de $a = (-1.8 - 0.22, -1.8 + 0.22) = (-2.02, -1.58)$

$$= \{x \mid \quad -2.02 < x < -1.58, \quad x \neq -1.8\}$$

$$= 0 < |x + 1.8| < 0.22$$

esto significa que el entorno reducido de $a$ son todos los valores de $x$ desde $-2.02$ hasta $-1.58$, quitando el $-1.8$ y sin incluir a los extremos:




si $x = -1.63$:

$$|-1.63 + 1.8| = 0.17 < 0.22$$

si $x = -2.01$:

$$|-2.01 + 1.8| = |-0.21| = 0.21 < 0.22$$

## III.2 DEFINICIÓN DE LÍMITE

Si se desea investigar el comportamiento de la función $f$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ para valores cercanos a $3$ tanto menores como mayores a este valor. En la tabla siguiente se muestran los valores de $f(x)$ para valores aproximados pero no iguales a $3$:

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 2.5 | 7.25 | 3.5 | 13.25 |
| 2.6 | 7.76 | 3.4 | 12.56 |
| 2.7 | 8.29 | 3.3 | 11.89 |
| 2.8 | 8.84 | 3.2 | 11.24 |
| 2.9 | 9.41 | 3.1 | 10.61 |
| 2.95 | 9.7025 | 3.05 | 10.3025 |
| 2.99 | 9.9401 | 3.01 | 10.0601 |
| 2.999 | 9.994001 | 3.001 | 10.006001 |
| 2.9999 | 9.99940001 | 3.0001 | 10.00060001 |

A partir de la tabla, se demuestra que cuando $x$ está cada vez más cerca de $3$ por cualquiera de los dos lados, $f(x)$ se aproxima a $10$. Este hecho se expresa al decir que "el límite de la función $f(x) = x^2 + 1$ cuando $x$ tiende a $3$ es igual a $10$". La notación para esta expresión es $\lim_{x \to 3} (x^2 + 1) = 10$.

Como se puede apreciar del ejemplo anterior, el interés se centra en conocer el valor de la función $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a un valor $a$, pero sin ubicarse en dicho valor. Esto es, si $x$ se acerca más y más a $a$ (pero $x$ no es igual a $a$), la función $f(x)$ se acerca más y más a un valor $L$. Esto significa que $f(x)$ *tiende a* $L$ *si* $x$ *tiende a* $a$.

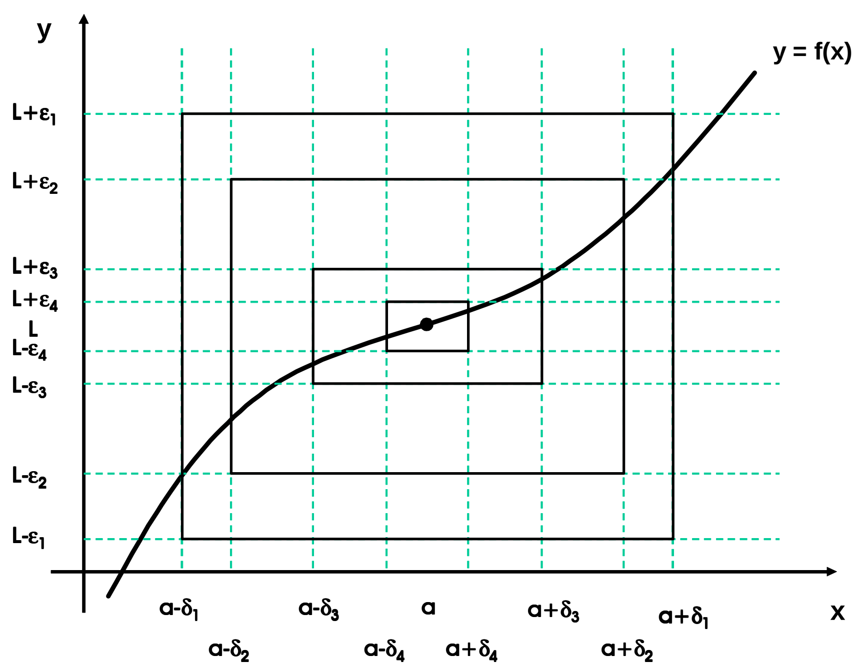
La frase "$x$ tiende a $a$" significa que independientemente de lo próximo que esté $x$ del valor $a$, existe siempre otro valor de $x$ (distinto de $a$) en el dominio de $f$ que está aún más próximo a $a$.

Definición de límite:

Una función $f$ tiende hacia el límite $L$ en $a$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Se puede deducir de la definición, que para que exista el límite $L$ de una función $f(x)$ es necesario que se forme un entorno de $L$ en $f(x)$ siempre y cuando se pueda generar un entorno reducido de $a$ en $x$.

Dado que el entorno de $L$ es: $\{y \mid L - \varepsilon < y < L + \varepsilon\}$, el entorno reducido de $a$ es: $\{x \mid a - \delta < x < a + \delta, \quad x \neq a\}$, donde $\delta$ y $\varepsilon$ pueden se tan pequeñas como se desee, por lo que se pueden generar una infinidad de entornos cada vez más pequeños, siempre que $x \neq a$. Esto puede interpretarse como la formación de rectángulos cada vez más pequeños que incluyan al punto $(a, L)$. Gráficamente esto es:




Nótese como cada entorno $L - \varepsilon_i < y < L + \varepsilon_i$ se forma respondiendo a los entornos $a - \delta_i < x < a + \delta_i$, y a medida que $\delta$ tiende a cero (sin llegar a serlo), también $\varepsilon$ tiende a cero.

En caso de existir, el límite se representa en forma simbólica como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y se lee: "*el límite de* $f(x)$ *cuando* $x$ *tienda hacia* $a$ *es* $L$".

Una función no puede tender a dos límites distintos a la vez. Esto es, si el límite de una función existe, es único:

El límite

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

existe si el límite por la izquierda,

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

y el límite por la derecha,

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

son iguales.

Estos dos últimos límites se conocen como *límites laterales*, lo que significa que se pueden aproximar los valores de $f(x)$ a $L$ tanto como se quiera, ya sea por la derecha o por la izquierda. De lo anterior, se cumple lo siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Para fines prácticos, para determinar si una función $f(x)$ tiene límite cuando $x \to a$ basta con aplicar la definición y establecer una expresión que relacione a $\delta$ y $\varepsilon$. En caso de no encontrar una relación, la función no tendrá límite en ese punto.

Ejemplos.
A través de la definición, calcular formalmente los siguientes límites:

1) $\lim_{x \to 2} (4x + 5)$

Solución:

$\lim_{x \to 2} (4x + 5) = 4(2) + 5 = 8 + 5 = 13$

aplicando la definición:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - a| < \delta$$

$$|4x + 5 - 13| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| < \delta$$

$$|4x - 8| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| < \delta$$

$$|4(x - 2)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| < \delta$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| < \delta$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

$\therefore$ el límite existe y es $13$.

2) $\lim_{x\to 3}\left(x^2-2x-6\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2-2x-6\right)=3^2-2(3)-6=9-6-6=-3$$

aplicando la definición:

$$\left|f(x)-L\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-a\right|<\delta$$

$$\left|x^2-2x-6-(-3)\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-3\right|<\delta$$

$$\left|x^2-2x-3\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-3\right|<\delta$$

$$\left|(x+1)(x-3)\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-3\right|<\delta$$

$$\left|x-3\right|<\frac{\varepsilon}{x+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-2\right|<\delta$$

$$\delta=\frac{\varepsilon}{x+1}$$

$\therefore$ el límite existe y es $-3$.

3) $\lim_{x\to 4}\left(x^3+x^2-x-1\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 4}\left(x^3+x^2-x-1\right)=4^3+4^2-4-1=64+16-4-1=75$$

aplicando la definición:

$$\left|f(x)-L\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-a\right|<\delta$$

$$\left|x^3+x^2-x-1-75\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-4\right|<\delta$$

$$\left|x^3+x^2-x-76\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-4\right|<\delta$$

$$\left|(x-4)\left(x^2+5x+19\right)\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-4\right|<\delta$$

$$\left|x-4\right|<\frac{\varepsilon}{x^2+5x+19} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-4\right|<\delta$$

$$\delta=\frac{\varepsilon}{x^2+5x+19}$$

$\therefore$ el límite existe y es $75$.

4) $\lim_{x\to -5}\left(-\frac{2}{x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to -5}\left(-\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{5}$$

aplicando la definición:

$$\left|f(x)-L\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-a\right|<\delta$$

$$\left|-\frac{2}{x}-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-(-5)|<\delta$$

$$\left|\frac{-10-2x}{5x}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x+5|<\delta$$

$$\left|\frac{-2(x+5)}{5x}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x+5|<\delta$$

aplicando el valor absoluto a los términos del producto:

$$2\left|\frac{(x+5)}{5x}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x+5|<\delta$$

$$|x+5|<\frac{5x\varepsilon}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-5|<\delta$$

$$\delta=\frac{5x\varepsilon}{2}$$

$\therefore$ el límite existe y es $\frac{2}{5}$.

5) $\lim_{x\to 1}\sqrt{2x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{2x}=\sqrt{2(1)}=\sqrt{2}$$

aplicando la definición:

$$|f(x)-L|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-a|<\delta$$

$$\left|\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-1|<\delta$$

multiplicando por el conjugado del binomio:

$$\left|\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-1|<\delta$$

$$\left|\frac{2x-2}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-1|<\delta$$

$$\left|\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-1|<\delta$$

$$|x-1|<\frac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)\varepsilon}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-1|<\delta$$

$$\delta=\frac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)\varepsilon}{2}$$

$\therefore$ el límite existe y es $\sqrt{2}$.

6) $\lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{x+3}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{-3+3}=\frac{1}{0} \quad (No\ existe)$$

si se desea aplicar la definición:

$$\left|f(x)-L\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-a\right|<\delta$$

no se puede ya que $L$ no es un valor definido, por lo tanto, el límite no existe.

## III.3 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Sean $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ dos límites que existen y $c$ una constante. Entonces:

1. $\lim_{x\to a}[c]=c$

*El límite de una constante es la misma constante.*

2. $\lim_{x\to a}[x]=a$

*El límite de la función identidad es igual al valor de* $a$.

3. $\lim_{x\to a}[c\cdot f(x)]=c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$

*El límite de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por el límite de la función.*

4. $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)$

*El límite de una suma algebraica es la suma algebraica de los límites.*

5. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$

*El límite de un producto es el producto de los límites.*

6. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

*El límite de un cociente es el cociente de los límites.*

7. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n \qquad n\in N$

*El límite de la potencia de una función es el límite de la función elevada a la potencia.*

8. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \qquad n\in N$ (si $n$ es par se asume que $\lim_{x\to a} f(x)>0$)

*El límite de una raíz es la raíz del límite.*

Ejemplos.
Aplicando las propiedades, calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 4} 5=5$

2) $\lim_{x\to -7} x=-7$

3) $\lim_{x\to 2} 6x^2 = 6(2)^2 = 6(4) = 24$

4) $\lim_{x\to 3} 3x^2 - 5x + 9 = 3(3)^2 - 5(3) + 9 = 3(9) - 5(3) + 9 = 27 - 15 + 9 = 21$

5) $\lim_{x\to -1} 5x^3 - 8x^2 + 10x - 15 = 5(-1)^3 - 8(-1)^2 + 10(-1) - 15 = 5(-1) - 8(1) + 10(-1) - 15$

$$= -5 - 8 - 10 - 15 = -38$$

6) $\lim_{x\to 5} \frac{1}{4x-6} = \frac{1}{4(5)-6} = \frac{1}{20-6} = \frac{1}{14}$

7) $\lim_{x\to -4} \frac{2x}{6x-10} = \frac{2(-4)}{6(-4)-10} = \frac{-8}{-24-10} = \frac{-8}{-34} = \frac{4}{17}$

8) $\lim_{x\to 2} (2x)^3 = (2(2))^3 = 4^3 = 64$

9) $\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{8x} = \sqrt[3]{8(8)} = \sqrt[3]{64} = 4$

10) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza el denominador:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

11) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza el numerador:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x+3) = 3+3 = 6$$

12) $\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2+x-6} = \frac{2(2)-4}{2^2+2-6} = \frac{4-4}{4+2-6} = \frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

13) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-6x+8} = \frac{4^2-16}{4^2-6(4)+8} = \frac{16-16}{16-24+8} = \frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{x+4}{x-2} = \frac{4+2}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

14) $\lim_{x\to -1} \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+3x+2} = \frac{((-1)^2-1)(-1+2)}{(-1)^2+3(-1)+2} = \frac{(1-1)(-1+2)}{1-3+2} = \frac{0}{0}$

a fin de eliminar la indeterminación se factoriza el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -1-1 = -2$$

15) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} = \frac{1^2-1}{1^2-3(1)+2} = \frac{1-1}{1-3+2} = \frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-2}=\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$$

16) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x^2-x-12}=\frac{4^2+4-20}{4^2-4-12}=\frac{16+4-20}{16-4-12}=\frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x^2-x-12}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+5)(x-4)}{(x+3)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+5}{x+3}=\frac{4+5}{4+3}=\frac{9}{7}$$

17) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-11x+30}{x^2-13x+42}=\frac{6^2-11(6)+30}{6^2-13(6)+42}=\frac{36-66+30}{36-78+42}=\frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-11x+30}{x^2-13x+42}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x-5)}{(x-6)(x-7)}=\lim_{x\to 6}\frac{x-5}{x-7}=\frac{6-5}{6-7}=\frac{1}{-1}=-1$$

18) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-14x+49}{x-7}=\frac{7^2-14(7)+49}{7-7}=\frac{49-98+49}{7-7}=\frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza el numerador:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-14x+49}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x-7)}{x-7}=\lim_{x\to 7}(x-7)=7-7=0$$

19) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x+5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{x+5}{(x+5)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{1}{x-5}=\frac{1}{5-5}=\frac{1}{0}\quad (no\ existe)$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2^2-4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4-4}=\frac{0}{0}$

multiplicando por el binomio conjugado del numerador para deshacer la indeterminación:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x^2-4)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{(2+2)(\sqrt{2}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{4(2\sqrt{2})}=\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

21) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x+8}{-2x+16}=\frac{8+8}{-2(8)+16}=\frac{8+8}{-16+16}=\frac{16}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza el denominador:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x+8}{-2x+16}=\lim_{x\to 8}\frac{x+8}{-2(x-8)}$$

como no se puede simplificar, el límite no existe.

22) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x^2-25}=\frac{5^3-125}{5^2-25}=\frac{125-125}{25-25}=\frac{0}{0}$

a fin de eliminar la indeterminación se factoriza el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2+5x+25}{x+5}=\frac{5^2+5(5)+25}{5+5}$$

$$=\frac{25+25+25}{10}=\frac{75}{10}=\frac{15}{2}$$

23) $\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\frac{7-7}{\sqrt{7-7}}=\frac{0}{\sqrt{0}}=\frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación, se eleva al cuadrado:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)^2}{\left(\sqrt{x-7}\right)^2}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)^2}{x-7}$$

factorizando el numerador:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x-7)}{x-7}=\lim_{x\to 7}(x-7)=7-7=0$$

24) $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\frac{\sqrt{6-6}}{6-6}=\frac{\sqrt{0}}{0}=\frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, elevando al cuadrado:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{x-6}\right)^2}{(x-6)^2}=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)^2}$$

factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)(x-6)}=\lim_{x\to 6}\frac{1}{x-6}=\frac{1}{6-6}=\frac{1}{0}\quad(no\ existe)$$

25) $\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\frac{\sqrt{10-1}-3}{10-10}=\frac{\sqrt{9}-3}{10-10}=\frac{3-3}{10-10}=\frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se multiplica por el binomio conjugado del numerador:

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}\left(\frac{\sqrt{x-1}+3}{\sqrt{x-1}+3}\right)=\lim_{x\to 10}\frac{x-1-9}{(x-10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{x-10}{(x-10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}=\lim_{x\to 10}\frac{1}{\sqrt{x-1}+3}=\frac{1}{\sqrt{10-1}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

## III.4 LÍMITES INFINITOS

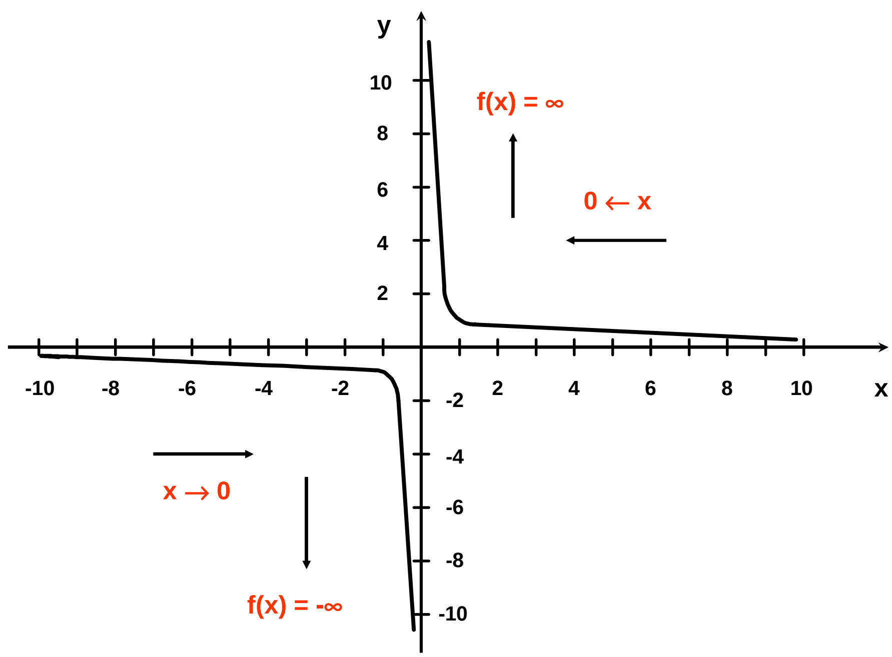
Los tipos de límites en los que una función $f(x)$ se hace infinita (ya sea positiva o negativa) cuando $x$ tiende a $a$ por la izquierda o por la derecha se conocen como *límites infinitos*.

¿Qué ocurre cuando $x$ se aproxima o tiende a cero en la función $f(x)=\frac{1}{x}$?

Tabulando la función se aprecia que cuando $x$ tiende a cero por la derecha, los valores de la función que son positivos, son cada vez más grandes. Es decir, los valores de la función aumentan. Mientras que, cuando $x$ tiende a cero por la izquierda, los valores de la función son negativos, son cada vez más pequeños. Es decir, los valores de la función disminuyen.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 10 | 0.1 | -10 | -0.1 |
| 5 | 0.2 | -5 | -0.2 |
| 4 | 0.25 | -4 | -0.25 |
| 3 | 0.333 | -3 | -0.333 |
| 2 | 0.5 | -2 | -0.5 |
| 1 | 1 | -1 | -1 |
| 0.5 | 2 | -0.5 | -2 |
| 0.2 | 5 | -0.2 | -5 |
| 0.1 | 10 | -0.1 | -10 |
| 0.01 | 100 | -0.01 | -100 |
| 0.001 | 1000 | -0.001 | -1000 |

Gráficamente en ambos casos, $f(x)$ crece o decrece sin tope, sin fronteras. Esto es,




El símbolo de infinito $(\infty)$ no significa que el límite exista, ya que no representa un número real. Simboliza el comportamiento no acotado (sin fronteras) de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$. De manera que, al decir que "el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$ es infinito" se interpreta que el límite *no existe*.

En general, considérese la función:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

las raíces del polinomio $q(x)$, provocan que la función no esté definida, es decir, sus límites son el infinito. Geométricamente, cada raíz representa a una *asíntota vertical*.

Ejemplos.

1) En la función $f(x)=\frac{1}{x-3}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\infty\ ,\quad \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty$$

el valor que anula al denominador es $3$, así que el límite en el infinito se presenta en la asíntota $x=3$.

2) En la función $f(x)=\frac{7x}{x^2-25}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{7}{x^2-25}=\infty\ ,\quad \lim_{x\to 5^-}\frac{7}{x^2-25}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -5^+}\frac{7}{x^2-25}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to -5^-}\frac{7}{x^2-25}=\infty$$

los valores que anulan al denominador son $5$ y $-5$, así que los límites en el infinito se presentan en las asíntotas $x=5$ y $x=-5$.

3) En la función $f(x)=\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty\ ,\quad \lim_{x\to 4^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -7^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to -7^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty$$

los valores que anulan al denominador son $0$, $4$ y $-7$ respectivamente, así que los límites en el infinito se presentan en las asíntotas $x=0$, $x=4$ y $x=-7$.

## III.5 LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los límites trigonométricos elementales son aquellos que se obtienen directamente, ya que basta sólo con evaluarlos y recordar los valores notables de dichas funciones.

Ejemplos.
Evaluar los siguientes límites trigonométricos elementales:

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} sen\, x = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.5$

2) $\lim_{x\to 0} 3\cos x = 3\cos(0)=3(1)=3$

3) $\lim_{x\to\pi} \tan x = \tan(\pi)=\infty$

4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \cot^2 x = \cot^2\frac{\pi}{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sec x}=\frac{4(0)}{\sec(0)}=\frac{4(0)}{1}=\frac{0}{1}=0$

6) $\lim_{x\to 2\pi}\csc x=\csc(2\pi)=\infty$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{12}{2\cos 4x}=\frac{12}{2\cos 4(0)}=\frac{12}{2\cos(0)}=\frac{12}{2(1)}=\frac{12}{2}=6$

Existen otros límites cuya evaluación no es tan simple. En este sentido, el límite de la función $\frac{sen\,x}{x}$ cuando $x$ tiende a cero es muy importante ya que la resolución de muchos límites trigonométricos se basan en su aplicación.

Por ello, se evalúa en primera instancia:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\frac{sen(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

aparentemente, el límite no existe. Sin embargo, si se tabula la función ( $x$ en radianes), se tiene:

| $x$ | $\frac{sen\,x}{x}$ |
|---|---|
| ± 1 | 0.841470 |
| ± 0.5 | 0.958851 |
| ± 0.4 | 0.973545 |
| ± 0.3 | 0.985067 |
| ± 0.2 | 0.993346 |
| ± 0.1 | 0.998334 |
| ± 0.01 | 0.999983 |
| ± 0.001 | 0.999999 |

Como puede apreciarse el límite tiende a la unidad[1]. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$$

Ejemplos.
Considerando el resultado anterior y aplicando identidades trigonométricas, obtener los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{3sen\,2x}{5x}=\frac{3sen\,2(0)}{5(0)}=\frac{3sen(0)}{0}=\frac{0}{0}$

multiplicando y dividiendo por $2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3sen\,2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2)(3)sen\,2x}{5(2x)}=\frac{6}{5}(1)=\frac{6}{5}$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{4sen^2 x}{x}=\frac{4sen^2(0)}{0}=\frac{4(0)^2}{0}=\frac{0}{0}$

expresando la potencia como producto:

[1] La demostración formal de este límite puede consultarse en la página 232 del libro *Cálculo Diferencial e Integral*, de J. Stewart incluido en la bibliografía.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4sen^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4sen\, xsen\, x}{x}=\lim_{x\to 0}4sen\, x\frac{sen\, x}{x}=4(sen\,0)(1)=4(0)(1)=0$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{sen\,5x}=\frac{5(0)}{sen\,(5(0))}=\frac{0}{sen\,(0)}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{sen\,5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{sen\,5x}{5x}}=\frac{1}{1}=1$$

En general, $\lim_{u\to 0}\frac{u}{sen\,u}=1$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,8x}{sen\;4x}=\frac{sen\,8(0)}{sen\;(4(0))}=\frac{sen\;(0)}{sen\;(0)}=\frac{0}{0}$

multiplicando y dividiendo por $8x$ y $4$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,8x}{sen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8xsen\,8x}{8xsen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x(1)}{sen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8(4x)}{4sen\,4x}=\frac{8}{4}(1)=2$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos(0)}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{sen\,x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x\tan\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}(1)\tan\frac{x}{2}=(1)\tan\frac{0}{2}=1\tan(0)=(1)(0)=0$$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\frac{sen^3(2(0))}{(0)sen^2(3(0))}=\frac{(0)^3}{0(0)^2}=\frac{0}{0}$

expresando las potencias como productos y multiplicando y dividiendo por $2$ y $(2x)(2x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2)sen\,2xsen^2 2x}{(2x)sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1)sen^2 2x}{sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2x)(2x)sen\,2xsen\,2x}{(2x)(2x)sen^2 3x}$$

multiplicando y dividiendo por $3$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2x)(2x)(1)}{sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2)(2)(3x)(3x)}{(3)(3)sen\,3xsen\,3x}=\frac{8}{9}(1)(1)=\frac{8}{9}$$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\frac{\cos(0)-1}{(0)^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $sen^2 x+\cos^2 x=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen^2 x}{x^2}=\frac{-sen\,xsen\,x}{x(x)}=-(1)(1)=-1$$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{7x}=\frac{\tan(0)}{7(0)}=\frac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $\tan x=\frac{sen\,x}{\cos x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,x}{\cos x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{7x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{7\cos x}=\frac{1}{7\cos(0)}=\frac{1}{7(1)}=\frac{1}{7}$$

9) $\lim_{x\to 0} x\csc 6x$

aplicando la identidad trigonométrica $\csc x=\frac{1}{sen\,x}$ y multiplicando y dividiendo por $6$:

$$\lim_{x\to 0} x\csc 6x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen\,6x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{6sen\,6x}=\frac{1}{6}(1)=\frac{1}{6}$$

10) $\lim_{x\to \pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=\frac{\tan(\pi)}{\pi-\pi}=\frac{0}{0}$

aplicando las identidades trigonométricas $\tan x=\tan(x-\pi)$ y $\tan x=\frac{sen\,x}{\cos x}$:

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=\lim_{x\to \pi}\frac{\tan(x-\pi)}{(x-\pi)}=\lim_{x\to \pi}\frac{sen(x-\pi)}{(x-\pi)\cos(x-\pi)}=\lim_{x\to \pi}\frac{1}{\cos(x-\pi)}=\frac{1}{\cos(\pi-\pi)}=\frac{1}{\cos(0)}=\frac{1}{1}=1$$

## III.6 LÍMITES QUE TIENDEN A INFINITO

Dada una función $f$ definida en un intervalo $(a,\infty)$. Entonces el

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a $L$ tanto como se quiera, si se elige una $x$ suficientemente grande. Esta expresión se lee como “el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a infinito es $L$”.

Similarmente, la expresión $\lim_{x\to -\infty} f(x)=L$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a $L$ tanto como se quiera, si se elige una $x$ negativa suficientemente grande y se lee como “el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a infinito es $L$”.

Para saber si existe el límite de una función cuando $x$ tiende a infinito es necesario analizar su comportamiento particular. Por su importancia, los límites de este tipo que revisten más interés de estudio son los de las funciones algebraicas y de las racionales.

En el primer caso, todos los límites de funciones algebraicas que tienden a infinito (o a menos infinito) no existen.

Ejemplos.
Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to\infty}(x^2-5x)=(\infty)^2-5(\infty)=\infty-\infty=\infty$

2) $\lim_{x\to\infty}(4x^2+3x-6)=4(\infty)^2+3(\infty)-6=\infty+\infty-6=\infty$

3) $\lim_{x\to -\infty}(-7x^3-3x^2+2x-6)=-7(-\infty)^3-3(-\infty)^2+2(-\infty)+8=\infty-\infty-\infty+8=\infty$

En el segundo caso, para calcular límites de funciones racionales, normalmente el procedimiento consiste en dividir cada término de la función por el término en $x$ que posee el mayor exponente, se reduce aplicando leyes de exponentes y se toma el límite, considerando que: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

Ejemplos.
Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{9x-6}{5x^2-2x+7}=\frac{9(\infty)-6}{5(\infty)^2-2(\infty)+7}=\frac{\infty-6}{\infty-\infty+7}=\frac{\infty}{\infty}$

Esta es una forma indeterminada, sin embargo, si se divide todo entre $x^2$ se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x-6}{5x^2-2x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}-\frac{6}{x^2}}{5-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{0-0}{5-0+0}=\frac{0}{5}=0$$

2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{18x^3+7x+1}{2x^2-6x^3-4}=\frac{18(-\infty)^3+7(-\infty)+1}{2(-\infty)^2-6(-\infty)^3-4}=\frac{-\infty-\infty+1}{\infty+\infty-4}=\frac{\infty}{\infty}$

Es una indeterminación, pero si se divide todo entre $x^3$ se tiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{18x^3+7x+1}{2x^2-6x^3-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{18x^3}{x^3}+\frac{7x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{6x^3}{x^3}-\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{18+\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x}-6-\frac{4}{x^3}}=\frac{18+0-0}{0-6-0}=\frac{18}{-6}=-3$$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x^2-8x}{3x^2-2x+10}=\frac{5(\infty)^4+2(\infty)^2-8(\infty)}{3(\infty)^2-2(\infty)+10}=\frac{\infty+\infty-\infty}{\infty-\infty+10}=\frac{\infty}{\infty}$

Esta es una forma indeterminada, sin embargo, si se divide todo entre $x^4$ se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x^2-8x}{3x^2-2x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^4}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}-\frac{8x}{x^4}}{\frac{3x^2}{x^4}-\frac{2x}{x^4}+\frac{10}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{10}{x^4}}=\frac{5+0-0}{0-0+0}=\frac{5}{0}\quad (no\ existe)$$

En general, para calcular límites que tienden a infinito (o a menos infinito), de las funciones racionales de la forma:

$$p(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_0}$$

existen tres casos posibles:

1) Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador y el límite de la función es cero.

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=0,\quad \text{si}\quad n<m$$

2) Si los grados de los polinomios en el numerador y el denominador son iguales, el límite es el cociente del coeficiente del exponente mayor del numerador entre el coeficiente del exponente mayor del denominador.

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{si} \quad n = m$$

3) Si el grado del numerador es mayor que el del denominador, el límite no existe.

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \quad (no\ existe), \quad \text{si} \quad n > m$$

Ejemplos.
Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{19+5x+8x^2+13x^5}{14x^6+17x^4+8x^5+12x}$

Como $n < m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^5-18x+13x^2}{-11-15x^3+6x^4-2x^2}$

Como $n > m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \quad (no\ existe)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-9x-12x^3}{4x-14-6x^3-2x^2}$

Como $n = m = 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \dfrac{-12}{-6} = 2$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3-11x+x^5}{5+x^3+7x-12x^2}$

Como $n > m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \quad (no\ existe)$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+20x^4-2x^2}{7x^2-1-9x^3-4x^4}$

Como $n = m = 4$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \dfrac{20}{-4} = -5$

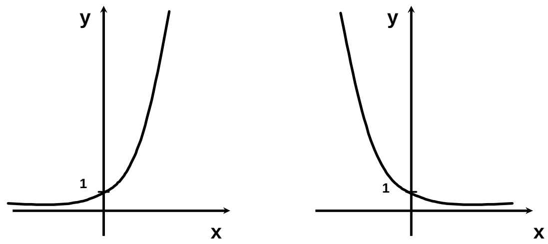
6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x+5x^4-x^2+48}{11x^3+x^6+3-4x^2-10x}$

Como $n < m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = 0$

## III.7 LÍMITES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Una *función exponencial* es una función de la forma: $f(x) = a^x$ donde $a$ es un número real positivo y $a \neq 1$. El comportamiento general de esta función se puede apreciar en las siguientes gráficas:

f(x) = a ˣ




**a > 1** **0 < a < 1**

Sus características son:

- Dominio = ( -∞, ∞ )
- Rango = ( 0, ∞ )
- La asíntota horizontal es el eje $x$
- Siempre corta al eje $y$ en el punto $P(0,1)$
- Siempre es creciente si $a > 1$ y siempre es decreciente si $0 < a < 1$
- La función crece más rápido si la base es más grande y decrece más rápido si la base es más pequeña.

De acuerdo a lo anterior, se puede inferir que:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty, \qquad a > 1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad a > 1$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0, \qquad 0 < a < 1$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty, \qquad 0 < a < 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$

Ejemplo.

Evaluar numéricamente el límite: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Solución.
Tabulando:

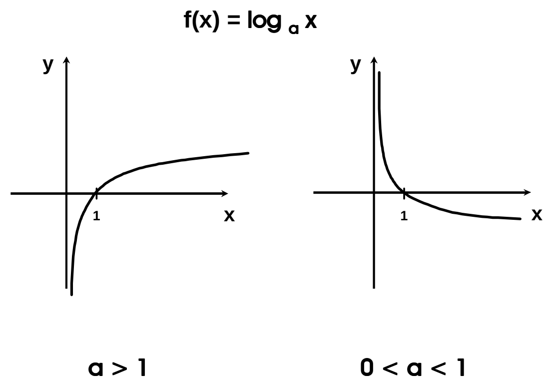
| $x$ | $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ |
|---|---|
| 3 | 1.587401 |
| 2 | 1.732050 |
| 1 | 2 |
| 0.5 | 2.25 |
| 0.1 | 2.593742 |
| 0.01 | 2.704813 |
| 0.001 | 2.716923 |
| 0.0001 | 2.718145 |
| 0.00001 | 2.718268 |

Como se puede advertir, el límite tiende a un número cercano a 2.71. Dicho límite es el número irracional conocido como $e$ y tiene el valor aproximado de $e \approx 2.71828182846\cdots$.

Se llama *función logarítmica* a la función real de variable real :

$$y = \log_a f(x)$$

El comportamiento general de esta función se puede apreciar en las siguientes gráficas:




La función logarítmica es una aplicación biyectiva definida de $\mathbf{R}^+$ en $\mathbf{R}$ y sus características son:

- Dominio = ( 0, ∞ )
- Rango = ( -∞, ∞ )
- La asíntota vertical es el eje $y$
- Siempre corta al eje $x$ en el punto $P(1,0)$
- Siempre es creciente si $a > 1$ y siempre es decreciente si $0 < a < 1$
- La función crece más rápido si la base es más pequeña (cuando $a > 1$) y decrece más rápido si la base es más grande (cuando $0 < a < 1$)
- La función logarítmica de base $a$ es la recíproca de la función exponencial de base $a$

Por lo anterior, se puede inferir que:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty, \qquad a > 1$
2. $\lim\limits_{x\to \infty} \log_a x = \infty, \qquad a > 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = \infty, \qquad 0 < a < 1$
4. $\lim\limits_{x\to \infty} \log_a x = -\infty, \qquad 0 < a < 1$

Ejemplo.

Evaluar numéricamente el límite: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_{10} x}{x}$

Solución.

Tabulando:

| $x$ | $\dfrac{\log_{10} x}{x}$ |
|---|---|
| 5 | 0.139794 |
| 10 | 0.100000 |
| 50 | 0.033979 |
| 100 | 0.020000 |
| 1000 | 0.003000 |
| 10,000 | 0.000400 |
| 100,000 | 0.000050 |
| 1'000,000 | 0.000006 |

$x$ es más grande que su logaritmo, así que a medida que $x$ crece, la fracción va disminuyendo. Por lo tanto: $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_{10} x}{x} = 0$

## III.8 CONTINUIDAD

Una función es continua en $x = a$ cuando no hay interrupción en la gráfica de $f$ en $a$. Su gráfica no aparece con huecos o saltos en $f$. Esto es, una función es continua si su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.

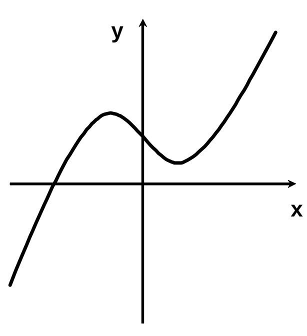
Formalmente, una función $f$ es *continua* en un punto $x = a$ si está definida en ese punto, y además:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

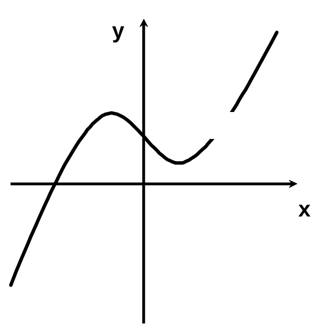
En caso de no cumplir con la condición se dice que la función es *discontinua*.

Una función $f$ es *continua en un intervalo* cuando es continua en todos los puntos de ese intervalo.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$




**Función continua**




**Función discontinua**

Ejemplos.

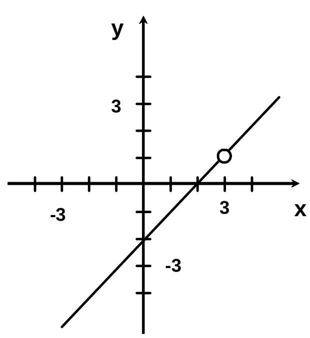
1) La función $f(x)=3x^2-5$ es continua en el punto $x=1$ porque $\lim\limits_{x\to 1} f(x)= f(1)=3(1)^2-5=3-5=-2$.

2) La función $f(x)=\sqrt{9sen\,x-5}$ es continua en el punto $x=\pi$ porque $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)= f(\pi)=\sqrt{9sen(\pi)-5}=\sqrt{9(1)-5}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$.

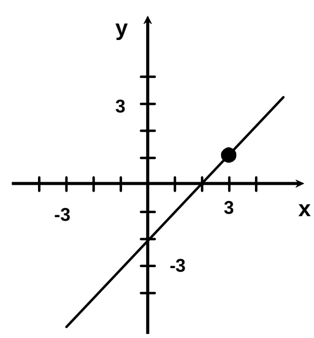
3) La función $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ es discontinua porque en el punto $x=4$ no está definida y porque el límite no existe.

4) La función $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ es discontinua porque en el punto $x=3$ no está definida, aunque el límite exista: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=3-2=1$.

Nótese como en este último ejemplo la función original puede reescribirse como: $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=x-2$, la cual es continua. En estos casos la discontinuidad recibe el nombre de *evitable*. Las gráficas de ambas funciones es la misma a excepción de que en la primera tiene una especie de orificio en el punto $x=3$ y en y la segunda no. Evitar la discontinuidad consiste en rellenar dicho orificio tal y como se ve en la siguiente figura:




**Función discontinua en x = 3**




**Función continua en x = 3**

Las discontinuidades se clasifican en: evitables y no evitables. Una discontinuidad en $x=a$ es evitable si $f$ se puede redefinir en ese punto.

Los siguientes tipos de funciones son continuas <u>en sus dominios</u>:

- Polinomiales
- Racionales
- De raíz
- Trigonométricas
- Trigonométricas inversas
- Exponenciales
- Logarítmicas

Sean $f$ y $g$ dos funciones continuas en $x = a$, entonces las siguientes operaciones de funciones también son continuas en $x = a$:

$f + g$

$f - g$

$f \cdot g$

$\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

$c \cdot f$, siendo $c$ una constante

$f \circ g(x) = f(g(x))$, si $f$ es continua en $g(a)$.

Ejemplo.
Determinar si las siguientes funciones son continuas en el punto dado:

1) $f(x) = 8x^3 - 3x^2 - 6x + 7$ en el punto $x = 2$
Solución:

$$f(2) = 8(2)^3 - 3(2)^2 - 6(2) + 7 = 8(8) - 3(4) - 12 + 7 = 64 - 12 - 12 + 7 = 47$$

$$\lim_{x \to 2} \left(8x^3 - 3x^2 - 6x + 7\right) = 8(2)^3 - 3(2)^2 - 6(2) + 7 = 8(8) - 3(4) - 12 + 7 = 64 - 12 - 12 + 7 = 47$$

como $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, la función sí es continua en $x = 2$ (lo cual era de esperarse ya que es una función polinomial).

2) $f(x) = \sqrt{2x - 10}$ en el punto $x = 3$
Solución:
$f(2) = \sqrt{2(3) - 10} = \sqrt{6 - 10} = \sqrt{-4}$ como la función no está definida en ese punto la función no es continua (no tiene caso calcular el límite porque no hay forma de eliminar la inexistencia).

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x + 7}$ en el punto $x = -7$
Solución:
El valor $x = -7$ anula al denominador, sin embargo, la función puede rescribirse como:

$$f(x) = \frac{x^2 - 49}{x + 7} = \frac{(x + 7)(x - 7)}{x + 7} = x - 7$$

$$f(7) = -7 - 7 = -14$$

$$\lim_{x \to -7} \frac{x^2 - 49}{x + 7} = \lim_{x \to -7} \frac{(x + 7)(x - 7)}{x + 7} = \lim_{x \to -7} (x - 7) = -7 - 7 = -14$$

por lo tanto, la función es discontinua en el punto $x = -7$ pero es evitable.

4) $f(x)=\dfrac{x^2}{12+3x}$ en el punto $x=-4$

Solución:

$f(2)=\dfrac{(-4)^2}{12+3(-4)}=\dfrac{16}{0}$ como la función no está definida en ese punto la función no es continua (no tiene caso calcular el límite porque no hay forma de eliminar la discontinuidad).

5) $f(x)=\log_{10}x^2$ en el punto $x=10$

Solución:

$f(10)=\log_{10}(10)^2=\log_{10}(100)=2$

$\lim\limits_{x\to 10}\log_{10}x^2=\log_{10}(10)^2=\log_{10}(100)=2$ como $\lim\limits_{x\to 10}f(x)=f(10)$, la función sí es continua en $x=10$ (lo cual era de esperarse ya que es una función logarítmica).

6) $f(x)=\dfrac{8x^5-24x^4}{4x}$ en el punto $x=0$

Solución:

El valor $x=0$ anula al denominador, sin embargo, la función puede rescribirse como:

$$f(x)=\frac{4x\left(2x^4-6x^3\right)}{4x}=2x^4-6x^3$$

$$f(0)=2(0)^4-6(0)^3=0-0=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x^5-24x^4}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\left(2x^4-6x^3\right)}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(2x^4-6x^3\right)=2(0)^4-6(0)^3=0-0=0$$

por lo tanto, la función es discontinua en el punto $x=0$ pero es evitable.

Ejemplos.

Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\dfrac{5x-2}{3x-18}$

Solución.

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en el punto $x=6$ (ya que ahí se anula el denominador). Además, no es evitable.

2) $f(x)=\dfrac{10x^3+5}{9x-x^2}$

Solución.

$$f(x)=\frac{10x^3+5}{x(9-x)}$$

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en los puntos $x=0$ y $x=9$ (ya que ahí se anula el denominador). Además, no son evitables.

3) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2-7x+10}$

Solución.

$$f(x)=\frac{(x+5)(x-5)}{(x-2)(x-5)}=\frac{x+5}{x-2}$$

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en los puntos $x=2$ y $x=5$ (ya que ahí se anula el denominador). Sin embargo, en $x=5$ es evitable.

4) $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 4 \\ 24-2x & x>4 \end{cases}$

Solución.

$f(4)=(4)^2=16$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4} x^2=(4)^2=16$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}(24-2x)=24-2(4)=24-8=16$

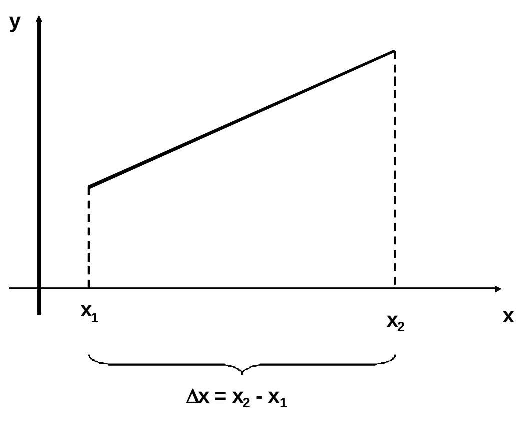
como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ entonces el $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=16$

Por lo tanto, hay continuidad en el intervalo $[0,\infty)$.

## III.9 INCREMENTOS

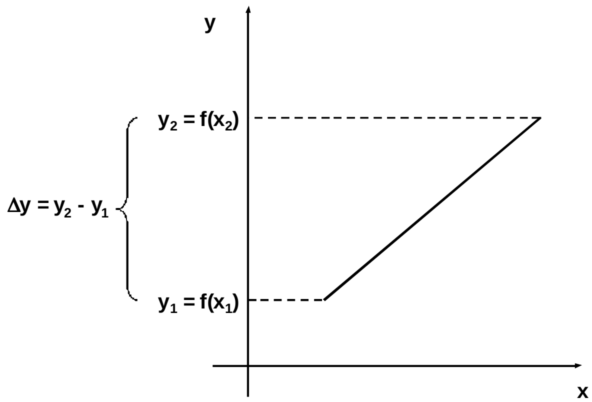
Se define como *incremento de la variable* $x$ al aumento o disminución que experimenta, desde un valor $x_1$ a otro $x_2$, en su campo de variación. Se denota por $\Delta x$. Por tanto:

$$\Delta x=x_2-x_1$$




De forma análoga, el *incremento de la variable* $y$ es el aumento o disminución que experimenta, desde un valor $y_1$ a otro $y_2$, en su campo de variación. Se denota por $\Delta y$, esto es:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$




Por definición, los incrementos pueden ser:
$\Delta > 0$ si el valor final es mayor que el inicial
$\Delta < 0$ si el valor final es menor que el inicial
$\Delta = 0$ si el valor final es igual que el inicial

Ejemplos.

1) Sea $y = 4x^2 - 3$, obtener $\Delta x$ y $\Delta y$ si $x$ pasa de $2$ a $2.5$
Solución:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2.5$$
$$\Delta x = 2.5 - 2 = 0.5$$
$$y_1 = f(x_1) = f(2) = 4(2)^2 - 3 = 16 - 3 = 13$$
$$y_2 = f(x_2) = f(2.5) = 4(2.5)^2 - 3 = 25 - 3 = 22$$
$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$\Delta y = 22 - 13 = 9$$

2) Sea $y = 6x^3 - 2x - 10$, obtener $\Delta x$ y $\Delta y$ si $x$ pasa de $3$ a $3.02$
Solución:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 3.02$$
$$\Delta x = 3.04 - 3 = 0.02$$
$$y_1 = f(x_1) = f(3) = 6(3)^3 - 2(3) - 10 = 162 - 6 - 10 = 146$$
$$y_2 = f(x_2) = f(3.02) = 6(3.02)^3 - 2(3.02) - 10 = 165.2616 - 6.04 - 10 = 149.2216$$
$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$\Delta y = 149.2216 - 146 = 3.2216$$

Como puede observarse, $y_2$ es el valor final de la variable dependiente cuando a $x$ se le asigna el valor $x_2$. De la misma forma, $y_1$ es el valor inicial de la variable dependiente cuando a $x$ se le asigna el valor inicial $x_1$. Esto es:

$$y_1 = f(x_1)$$

$$y_2 = f(x_2)$$

Ahora, de $\Delta x = x_2 - x_1$, se despeja $x_2$:

$x_2 = x_1 + \Delta x$

por lo que $y_2$ es:

$f(x_2) = f(x_1 + \Delta x)$

por lo tanto, sustituyendo en $\Delta y = y_2 - y_1$:

$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

Esto significa que al darle un incremento a $x$ en el punto $x_1$ le corresponde a $y$ un incremento:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

Ahora, si a la expresión anterior se divide por $\Delta x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se obtiene el *cociente de incrementos*.

## III.10 DEFINICIÓN DE DERIVADA

Se define como derivada de una función $y = f(x)$ con respecto a $x$ en un punto $x_1$, al límite, si existe, del cociente de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x$ tiende a cero.

Esto significa que la derivada es el límite del cociente del incremento de la variable dependiente, entre el incremento de la variable independiente, cuando éste tiende a cero, y se denota por:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Las notaciones más comunes de la derivada de la función $y = f(x)$ con respecto a $x$ son:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $y'$ | ó | $f'(x)$ | Notación de Lagrange |
| $\frac{dy}{dx}$ | ó | $\frac{df(x)}{dx}$ | Notación de Leibniz |
| $D_x y$ | ó | $D_x f(x)$ | Notación de Cauchy |
| $\dot{y}$ | ó | $\dot{f}(x)$ | Notación de Newton |

La más usada es la notación de Leibniz[2]. Las distintas partes de estas expresión carecen de todo significado cuando se consideran separadamente. Las $d$ no son números, no pueden simplificarse, y la expresión completa no es el cociente de otros dos números $"dy"$ y $"dx"$'.

[2] Leibniz es generalmente considerado como el codescubridor independiente del cálculo infinitesimal (junto con Newton).

Leibniz llegó a este símbolo a través de su noción intuitiva de la derivada, que él consideraba no como el límite de los cocientes $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$, sino como el "valor" de este cociente cuando $\Delta x$ es un número *infinitamente pequeño*. Esta cantidad "infinitamente pequeña" fue designada por $dx$ y la correspondiente diferencia "infinitamente pequeña" $f(x+\Delta x)-f(x)$ por $df(x)$.

## III.11 MÉTODO DE LOS CUATRO PASOS

Para hallar la derivada de una función se sigue un procedimiento conocido como *método de los cuatro pasos* que consiste en:

1. A la función en $x$ se le incrementa en $\Delta x$: $f(x+\Delta x)$
2. A lo obtenido, se le resta la función original, es decir $f(x+\Delta x)-f(x)$
3. Se divide todo por $\Delta x$: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
4. Se toma el límite cuando $\Delta x$ tiende a cero: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, y si existe este límite, es su derivada.

Ejemplos.
Aplicando el método de los cuatro pasos, obtener la derivada de las siguientes funciones.

1) $y=5x-3$
Solución:
$f(x)=5x-3$
1$^{er}$ paso: $f(x+\Delta x)=5(x+\Delta x)-3$
2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=5(x+\Delta x)-3-(5x-3)$
$=5x+5\Delta x-3-5x+3=5\Delta x$
3$^{er}$ paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{5\Delta x}{\Delta x}=5$
4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}5=5$
$\therefore\quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=5$

2) $y=4x^2-7x+6$
Solución:
$f(x)=4x^2-7x+6$
1$^{er}$ paso: $f(x+\Delta x)=4(x+\Delta x)^2-7(x+\Delta x)+6$
$=4\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)-7x-7\Delta x+6=4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7x-7\Delta x+6$
2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7x-7\Delta x+6-\left(4x^2-7x+6\right)$
$=4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7x-7\Delta x+6-4x^2+7x-6$
$=8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7\Delta x$

3[er] paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7\Delta x}{\Delta x}=8x+4\Delta x-7$

4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(8x+4\Delta x-7)=8x-7$

$\therefore \quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=8x-7$

3) $y=2x^3-5x-11$

Solución:

$f(x)=2x^3-5x-11$

1[er] paso: $f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)^3-5(x+\Delta x)-11$

$=2\left(x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right)-5x-5\Delta x-11=2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5x-5\Delta x-11$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5x-5\Delta x-11-\left(2x^3-5x-11\right)$

$=2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5x-5\Delta x-11-2x^3+5x+11=6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5\Delta x$

3[er] paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5\Delta x}{\Delta x}=6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2-5$

4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2-5\right)=6x^2-5$

$\therefore \quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=6x^2-5$

4) $y=\frac{7}{x^2}$

Solución:

$f(x)=\frac{7}{x^2}$

1[er] paso: $f(x+\Delta x)=\frac{7}{(x+\Delta x)^2}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{7}{(x+\Delta x)^2}-\frac{7}{x^2}$, simplificando las fracciones:

$$=\frac{7x^2-7(x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{7x^2-7\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{7x^2-7x^2-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}$$

$$=\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}$$

3[er] paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}}{\Delta x}=\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2\Delta x}=\frac{-14x-7\Delta x}{(x+\Delta x)^2x^2}$

4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-14x-7\Delta x}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{-14x}{x^2x^2}=\frac{-14x}{x^4}=-\frac{14}{x^3}$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{14}{x^3}$$

5) $y=\sqrt{3x}$

Solución:

$f(x)=\sqrt{3x}$

1^er paso: $f(x+\Delta x)=\sqrt{3(x+\Delta x)}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{3(x+\Delta x)}-\sqrt{3x}$

multiplicando arriba y abajo por el conjugado del binomio, se tiene:

$$=\left(\sqrt{3x+3\Delta x}-\sqrt{3x}\right)\cdot\frac{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\frac{3x+3\Delta x-3x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\frac{3\Delta x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}$$

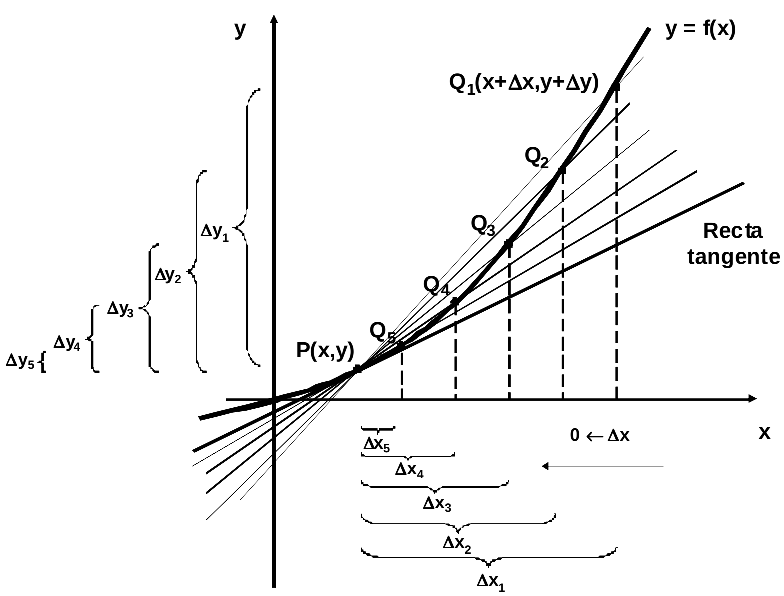
3^er paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{3\Delta x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}}{\Delta x}=\dfrac{3\Delta x}{\left(\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}\right)\Delta x}=\dfrac{3}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}$

4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\dfrac{3}{\sqrt{3x}+\sqrt{3x}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

## III.12 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Sea una función $y=f(x)$. Si se toma un punto cualquiera $P(x,y)$ y se efectúa un incremento cualquiera $\Delta x_1$ se obtiene su respectivo incremento $\Delta y_1$ en el punto $Q_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. La razón $\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ representa la pendiente del segmento $\overline{PQ_1}$ .



Ahora, si $P$ permanece fijo y $\Delta x$ es cada vez más pequeño, lo que sucede es que el punto $Q$ se mueve sobre la curva acercándose a $P$. Cada vez que disminuye $\Delta x$, la recta $\overline{PQ_1}$ gira en torno a $P$ hasta que llega a su posición límite que es la tangente a la curva en el punto $P$. Por lo tanto el $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ es la pendiente de la tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $P$.

*La interpretación geométrica de la derivada es la pendiente de la recta tangente en el punto* $P(x,y)$.

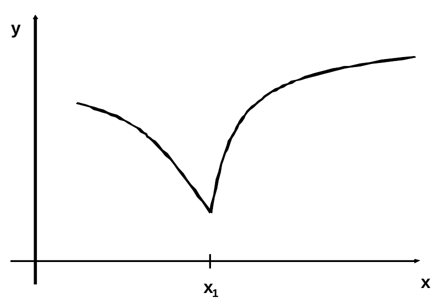
## III.13 DERIVABILIDAD DE FUNCIONES

Una función $f(x)$ es derivable en el punto $x_1$ si $f'(a)$ existe. Por su parte, una función es derivable en un intervalo abierto $(a,b)$ si es derivable en cualquier punto del intervalo.

Es importante resaltar que: si $f(x)$ es derivable en un punto $x_1$, entonces $f(x)$ es continua en $x_1$, sin embargo, el caso inverso, *no necesariamente es cierto* porque hay funciones que son continuas pero no son derivables.

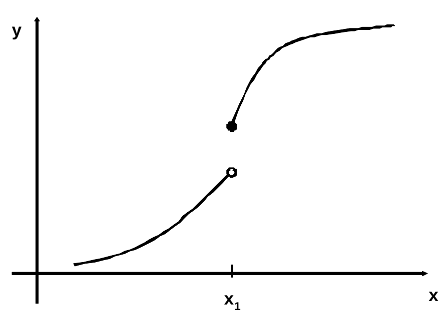
En general, si la gráfica de una función presenta cualquiera de los siguientes tres casos, entonces una función no es derivable.

1. Si posee “picos” ya que la función no posee tangente en esos puntos y no es derivable allí debido a que al calcular $f'(x_1)$ se encuentra que los límites laterales son diferentes.



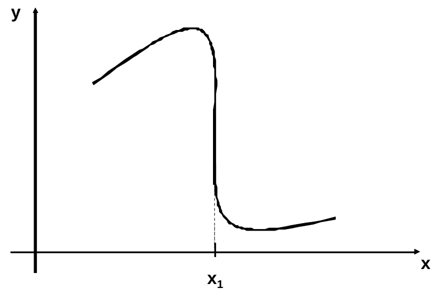

Un “pico”

2. Si una función $f(x)$ no es continua en $x_1$ entonces no es derivable en ese punto, por lo tanto, en cualquier discontinuidad, la función deja de ser derivable.



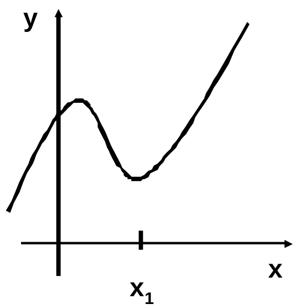

Discontinuidad

3. Si la curva tiene una recta tangente vertical cuando $x = x_1$. Esto es: $f(x)$ es continua en $x_1$ y $\lim_{x \to x_1} |f'(x_1)| = \infty$, lo que significa que las tangentes se vuelven cada vez más pronunciadas.

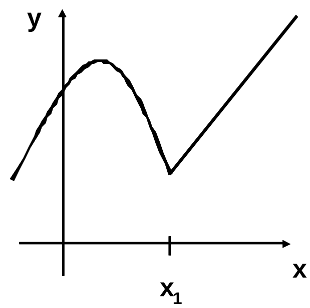



Tangente vertical

A pesar de que la gráfica tome la apariencia de una recta, mientras no presente un cambio brusco en forma de esquina, entonces la función es derivable. Las siguientes gráficas muestran esto en un punto $x = x_1$:




f(x) es derivable en x = $x_1$




f(x) no es derivable en x = $x_1$

Ejemplo.
Determinar los puntos en que la función $f(x) = |x|$ es derivable.

Solución:
Como el valor absoluto de $x$ presenta tres posibles valores, se analiza por separado:

- Si $x > 0$, se tiene: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$

Por tanto, la función es derivable para $x > 0$.

- Si $x < 0$, se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-1) = -1$$

Por tanto, la función es derivable para $x < 0$.

- Si $x = 0$, se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} \quad \text{(si existe)}$$

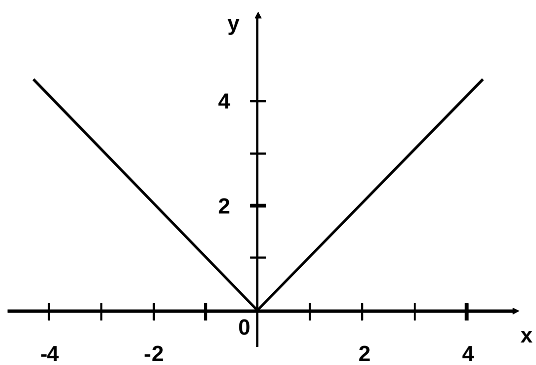
Se comparan los límites laterales por separado:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que $\lim_{\Delta x \to 0^+} f(0) \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} f(0)$, no existe $f'(0)$. Por lo tanto $f(x)$ es derivable para toda $x$ excepto en $x = 0$.

En la gráfica siguiente se aprecia como la función no posee tangente en $x = 0$.




y = f(x) = |x|

## III.14 FÓRMULAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

Sean las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$, tal que se forme una composición de funciones que cumpla con: $y = f(g(x))$.

La derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función compuesta se obtiene por medio de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Expresión conocida también como la *regla de la cadena*.

La regla de la cadena es muy útil en cambios de variable a fin de simplificar la derivación de funciones: a una parte de la función se le denota como $u$, se deriva la función respecto a esta variable, se le multiplica por $\frac{du}{dx}$ y finalmente se sustituye $u$ por la parte correspondiente de la función original en $x$.

Sean $u, v, w$ tres funciones de $x$, es decir, $u = f(x),\ v = f(x),\ w = f(x)$ y $c$ una constante. Las once primeras formulas básicas de derivación, considerando la regla de la cadena, son:

1) $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Demostración:

$f(x) = c$

1$^{er}$ paso: $f(x+\Delta x) = c$

2º paso: $f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$

3$^{er}$ paso: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(c) = 0$

*La derivada de una constante siempre es cero.*

2) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

Demostración:

$f(x) = x$

1$^{er}$ paso: $f(x+\Delta x) = x + \Delta x$

2º paso: $f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x) - x = x + \Delta x - x = \Delta x$

3$^{er}$ paso: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(1) = 1$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1$

*La derivada de $x$, respecto a si misma, es uno.*

3) $\frac{d}{dx}(c \cdot x) = c$

Demostración:

$f(x) = c \cdot x$

1$^{er}$ paso: $f(x+\Delta x) = c(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x) - f(x) = c(x+\Delta x) - cx = cx + c\Delta x - cx = c\Delta x$

3$^{er}$ paso: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c\Delta x}{\Delta x} = c$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(c) = c$

$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(c\cdot x)=c$

*La derivada de una función por una constante es igual a la constante.*

4) $\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$

Demostración:

$f(x)=u+v+w$

1er paso: $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)+w(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)+w(x+\Delta x)-u(x)-v(x)-w(x)$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x)+w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$

$$=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$$

$\therefore \quad f'(u+v+w)=\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$

*La derivada de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de esas funciones.*

5) $\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$

Demostración:

$f(x)=u\cdot v$

1er paso: $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$

restando y sumando: $v(x)\cdot u(x+\Delta x)$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-v(x)\cdot u(x+\Delta x)+v(x)\cdot u(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]+v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$

$$=\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}+\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to o}\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to o}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad f'(u\cdot v)=\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

*La derivada de un producto de dos funciones es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera*.

6) $$\frac{d}{dx}(u\cdot v\cdot w)=u\cdot v\cdot\frac{dw}{dx}+u\cdot w\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot w\cdot\frac{du}{dx}$$

Demostración:

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$$

1er paso: $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$

3er paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)}{\Delta x}$

restando y sumando: $u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x)$ y $u(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot w(x)$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x)}{\Delta x}$$
$$+\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x)-u(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot w(x)}{\Delta x}$$
$$+\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot w(x)-u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}+u(x+\Delta x)\cdot w(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$+v(x)\cdot w(x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot w(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}v(x)\cdot w(x)\cdot\lim_{\Delta x\to o}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad f'(u\cdot v)=\frac{d}{dx}(u\cdot v\cdot w)=u\cdot v\cdot\frac{dw}{dx}+u\cdot w\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot w\cdot\frac{du}{dx}$$

*La derivada de un producto de tres funciones es igual al producto de la primera y la segunda funciones por la derivada de la tercera, más el producto de la primera y la tercera funciones por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda y la tercera funciones por la derivada de la primera*.

7) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{c}\right)=\frac{1}{c} \qquad c\neq 0$$

Demostración:

$$f(x)=\frac{x}{c}$$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\dfrac{(x+\Delta x)}{c}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{(x+\Delta x)}{c}-\dfrac{x}{c}=\dfrac{x}{c}+\dfrac{\Delta x}{c}-\dfrac{x}{c}=\dfrac{\Delta x}{c}$

3er paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\frac{\Delta x}{c}}{\Delta x}=\dfrac{1}{c}$

4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{1}{c}$

$\therefore \quad f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{c}\right)=\dfrac{1}{c} \qquad c\neq 0$

*La derivada del cociente de la función identidad sobre una constante es igual al inverso multiplicativo de la constante*.

8) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{x}\right)=c\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{c}{x^2}$

Demostración:

$f(x)=\dfrac{c}{x}$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\dfrac{c}{x+\Delta x}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{c}{x+\Delta x}-\dfrac{c}{x}=\dfrac{cx-c(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=\dfrac{cx-cx-c\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\dfrac{c\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

3er paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{-\frac{c\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=-\dfrac{c\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x}=-\dfrac{c}{x(x+\Delta x)}$

4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{c}{x(x+\Delta x)}\right)=-\dfrac{c}{x^2}$

$\therefore \quad f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{x}\right)=-\dfrac{c}{x^2}$

*La derivada del cociente de una constante sobre la función identidad es igual a la constante dividida por el cuadrado de la función afectado todo por un signo negativo*.

9) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}, \qquad v\neq 0$

Demostración:

$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$

restando y sumando: $u(x)\cdot v(x)$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot v(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot \Delta x}$$

4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot \Delta x}$

$$=\frac{v(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}-u(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{v(x)\cdot u'(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}; \qquad v\neq 0$$

*La derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador*.

10) $\frac{d}{dx}x^n=n\cdot x^{n-1}$

Demostración:

$f(x)=x^n$

1er paso: $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^n$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\frac{\left[x^n+\frac{nx^{n-1}\Delta x}{1!}+\frac{n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^3}{3!}+\cdots+(\Delta x)^n\right]-x^n}{\Delta x}$$

$$=\frac{nx^{n-1}}{1!}+\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^2}{3!}+\cdots(\Delta x)^{n-1}$$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{nx^{n-1}}{1!}+\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^2}{3!}+\cdots(\Delta x)^{n-1}\right]=n\cdot x^{n-1}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=n\cdot x^{n-1}$$

*La derivada de una potencia de* $x$ *es igual al exponente multiplicado por* $x$ *elevado al exponente menos uno*.

En resumen y aplicando la regla de la cadena, en donde $u=f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx}(c)=0$

2) $\frac{d}{dx}(x)=1$

3) $\frac{d}{dx}(c\cdot u)=c\cdot\frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}(u\cdot v\cdot w)=u\cdot v\cdot\frac{dw}{dx}+u\cdot w\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot w\cdot\frac{du}{dx}$

7) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}\cdot\frac{du}{dx} \qquad c\neq 0$

8) $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right)=c\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{c}{u^2}\cdot\frac{du}{dx}$

9) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}, \qquad v\neq 0$

10) $\frac{d}{dx}u^n=n\cdot u^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}$

Ejemplos.
Aplicando las fórmulas de derivación, obtener la derivada de las siguientes funciones:

1) $y=4$

$\frac{dy}{dx}=0$

2) $y=7x$

$\frac{dy}{dx}=7$

3) $y=4x^3$

$\frac{dy}{dx}=12x^2$

4) $y=8x^2-5x+6$

$\frac{dy}{dx}=16x-5$

5) $y=x^3-9x^2-11x+1$

$\frac{dy}{dx}=3x^2-18x-11$

6) $y=\left(6x^2-7x-2\right)^5$

Aplicando la regla de la cadena:

$u=6x^2-7x-2$

$y=u^5$

$\frac{dy}{du}=5u^4$

$\frac{du}{dx}=12x-7$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=5\left(6x^2-7x-2\right)^4(12x-7)$

para fines prácticos, se deriva a la función del paréntesis en su conjunto $(u)$ y se multiplica por la derivada del contenido del paréntesis:

7) $y=(8x^4-5x^2-13x)^3$

$\frac{dy}{dx}=3(8x^4-5x^2-13x)^2(32x^3-10x-13)$

8) $y=(7x^3-2x^4-5x-6)^5$

$\frac{dy}{dx}=5(7x^3-2x^4-5x-6)^4(21x^2-8x^3-5)$

9) $y=(9x^2-12x+8)(-5x^2-11x+4x^3-13)$

$\frac{dy}{dx}=(9x^2-12x+8)(-10x-11+12x^2)+(-5x^2-11x+4x^3-13)(18x-12)$

10) $y=(10x^4-16x^3-8x^2+7x+5)(15x^2-6x+9)$

$\frac{dy}{dx}=(10x^4-16x^3-8x^2+7x+5)(30x-6)+(15x^2-6x+9)(40x^3-48x^2-16x+7)$

11) $y=(11x^2-17x)(8x^3-9)(6x^4-4)$

$\frac{dy}{dx}=(11x^2-17x)(8x^3-9)(24x^3)+(11x^2-17x)(6x^4-4)(24x^2)+(8x^3-9)(6x^4-4)(22x-17)$

12) $y=(3x^5-12x^4-5)(2x^2+1)(3x^3-16x^2)$

$$\frac{dy}{dx}=(3x^5-12x^4-5)(2x^2+1)(9x^2-32x)+(3x^5-12x^4-5)(3x^3-16x^2)(4x)$$
$$+(2x^2+1)(3x^3-16x^2)(15x^4-48x^3)$$

13) $y=(4x^2-9x^3)^5(6x^8+14x)^7$

$\frac{dy}{dx}=(4x^2-9x^3)^5\,7(6x^8+14x)^6(48x^7+14)+(6x^8+14x)^7\,5(4x^2-9x^3)^4(8x-27x^2)$

14) $y=\frac{4x^2-x-11}{6}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{8x-1}{6}$

15) $y=\frac{7(4x^3-2x^5-1)^3}{-9}$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{21(4x^3-2x^5-1)^2(12x^2-10x^4)}{9}$

16) $y=\sqrt{x}$

$y=x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

17) $y=\sqrt[5]{x^3}$

$$y = x^{\frac{3}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

18) $y = \sqrt[4]{9x^6}$

$$y = \left(9x^6\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}\left(9x^6\right)^{-\frac{3}{4}}54x^5 = \frac{54x^5}{4\left(9x^6\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{54x^5}{4\sqrt[4]{\left(9x^6\right)^3}}$$

19) $y = \sqrt[6]{2x^8}$

$$y = \left(2x^8\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}\left(2x^8\right)^{-\frac{5}{6}}16x^7 = \frac{16x^7}{6\left(2x^8\right)^{\frac{5}{6}}} = \frac{8x^7}{3\sqrt[6]{\left(2x^8\right)^5}}$$

20) $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}$

$$y = \frac{1}{x^{\frac{4}{7}}} = x^{-\frac{4}{7}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{7}x^{-\frac{11}{7}} = -\frac{4}{7x^{\frac{11}{7}}} = -\frac{4}{7\sqrt[7]{x^{11}}}$$

21) $y = \sqrt[3]{2x - 7x^4}$

$$y = \left(2x - 7x^4\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(2x - 7x^4\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2 - 28x^3\right) = \frac{2 - 28x^3}{3\left(2x - 7x^4\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 - 28x^3}{3\sqrt[3]{\left(2x - 7x^4\right)^2}}$$

22) $y = \frac{-41}{\sqrt[6]{5x^9 - 8x^2}}$

$$y = \frac{-41}{\left(5x^9 - 8x^2\right)^{\frac{1}{6}}} = -41\left(5x^9 - 8x^2\right)^{-\frac{1}{6}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{41}{6}\left(5x^9 - 8x^2\right)^{-\frac{7}{6}}\left(45x^8 - 16x\right) = \frac{41\left(45x^8 - 16x\right)}{6\left(5x^9 - 8x^2\right)^{\frac{7}{6}}} = \frac{41\left(45x^8 - 16x\right)}{6\sqrt[6]{\left(5x^9 - 8x^2\right)^7}}$$

23) $y = \frac{7x^2 - 3x - 2}{5x^2 - 11x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(5x^2 - 11x\right)\left(14x - 3\right) - \left(7x^2 - 3x - 2\right)\left(10x - 11\right)}{\left(5x^2 - 11x\right)^2}$$

24) $y=\frac{8x^4-13x^3+4}{7x^5+x-5x^6}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(7x^5+x-5x^6\right)\left(32x^3-39x^2\right)-\left(8x^4-13x^3+4\right)\left(35x^4+1-30x^5\right)}{\left(7x^5+x-5x^6\right)^2}$$

25) $y=\frac{\left(7x^3-11x-1\right)^3}{\sqrt[5]{x^8-2x}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)3\left(7x^3-11x-1\right)^2\left(21x^2-11\right)-\left(7x^3-11x-1\right)^3\frac{1}{5}\left(x^8-2x\right)^{-\frac{4}{5}}\left(8x^7-2\right)}{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)3\left(7x^3-11x-1\right)^2\left(21x^2-11\right)-\left(7x^3-11x-1\right)^3\frac{8x^7-2}{5\sqrt[5]{\left(x^8-2x\right)^4}}}{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)^2}$$

26) $y=\frac{17}{x^5-3}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{17\left(5x^4\right)}{\left(x^5-3\right)^2}$$

27) $y=\frac{6}{3x^6-5x^4}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{6\left(18x^5-20x^3\right)}{\left(3x^6-5x^4\right)^2}$$

28) $y=\frac{-14}{\left(8x^9-2x\right)^3}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(-14)3\left(8x^9-2x\right)^2\left(72x^8-2\right)}{\left(8x^9-2x\right)^6}=\frac{14\left(72x^8-2\right)}{\left(8x^9-2x\right)^4}$$

29) $y=\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{7}{x^3}$

$$y=4x^{-1}-12x^{-2}+7x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx}=-4x^{-2}+24x^{-3}-21x^{-4}=-\frac{4}{x^2}+\frac{24}{x^3}-\frac{21}{x^4}$$

30) $y=\frac{6}{8x^7}+\frac{14}{5x^2}+9x-3x^2-\frac{15}{x^4}$

$$y=\frac{6}{8}x^{-7}+\frac{14}{5}x^{-2}+9x-3x^2-15x^{-4}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{42}{8}x^{-8}-\frac{28}{5}x^{-3}+9-6x+60x^{-5}=-\frac{42}{8x^8}-\frac{28}{5x^3}+9-6x+\frac{60}{x^5}$$

## III.15 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $y=f(x)$ se conoce como primera derivada. Si ésta es a su vez una función derivable, su derivada se denomina *segunda derivada* de la función original, que se denota como:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$$

La derivada de la segunda derivada, en caso de existir, se conoce como *tercera derivada* de la función:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x)$$

El proceso es sucesivo, y mientras exista, la *derivada enésima* es: $\frac{d^ny}{dx^n}=f^n(x)$.

Ejemplo.
Obtener la tercera derivada de la función $y=2x^3-4x^2-5x-12$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=6x^2-8x-5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=12x-8$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=12$$

Ejemplo.
Obtener la quinta derivada de la función $y=2x^6-7x^4+5x^3-9x^2-19$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=12x^5-28x^3+15x^2-18x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=60x^4-84x^2+30x-18$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=240x^3-168x+30$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=720x^2-168$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)=1{,}440x$$

Ejemplo.

Obtener la séptima derivada de la función $y = \frac{5}{x}$

Solución:

$y = 5x^{-1}$

$\frac{dy}{dx} = -5x^{-2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 10x^{-3}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -30x^{-4}$

$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 120x^{-5}$

$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = -600x^{-6}$

$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right) = 3{,}600x^{-7}$

$\frac{d^7y}{dx^7} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^6y}{dx^6}\right) = 25{,}200x^{-8} = \frac{25{,}200}{x^8}$

## III.16 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA IMPLÍCITA

Como se definió en el primer capítulo, una función expresada en forma implícita es de la forma $f(x,y) = 0$. Para encontrar la derivada podría encontrarse su equivalente forma explícita y derivar. Sin embargo, como se sabe, no siempre es fácil despejar la variable dependiente, por lo que resulta necesario derivar en forma implícita.

En este sentido, la derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $f(x,y) = 0$ se puede obtener efectuando el procedimiento que consta de los siguientes pasos:

1. Se expresa el operador $\frac{dy}{dx}$ a cada término de la función
2. Se deriva cada término, considerando la regla del producto (que en su caso aplique), y además, tomando en cuenta que la derivada de una función en $y$ con respecto a $x$ es igual a la derivada de esta función con respecto a $y$ multiplicada por la derivada de $y$ con respecto a $x$, esto es: $\frac{df(y)}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$
3. Se acomodan en el primer miembro todos los términos que posean al operador $\frac{dy}{dx}$ y en el segundo miembro a los que no lo tengan, siempre respetando las reglas de los signos.

4. Se factoriza el operador $\frac{dy}{dx}$

5. Finalmente, se obtiene la derivada $\frac{dy}{dx}$ al despejarla de la expresión resultante.

Ejemplos.
Hallar la derivada de las siguientes funciones expresadas en forma implícita:

1) $4x^2y^3+5x^4-2y^5-12=0$

Solución:

$$\frac{d}{dx}4x^2y^3+\frac{d}{dx}5x^4-\frac{d}{dx}2y^5-\frac{d}{dx}12=\frac{d}{dx}0$$

$$4x^2 3y^2\frac{dy}{dx}+y^3 8x+20x^3-10y^4\frac{dy}{dx}-0=0$$

$$4x^2 3y^2\frac{dy}{dx}-10y^4\frac{dy}{dx}=-8xy^3-20x^3$$

$$\frac{dy}{dx}\left(12x^2y^2-10y^4\right)=-8xy^3-20x^3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-8xy^3-20x^3}{12x^2y^2-10y^4}$$

2) $3x^5-6x^4y^6+2y^3+8x^3-7y^5+15=0$

Solución:

$$\frac{d}{dx}3x^5-\frac{d}{dx}6x^4y^6+\frac{d}{dx}2y^3+\frac{d}{dx}8x^3-\frac{d}{dx}7y^5+\frac{d}{dx}15=\frac{d}{dx}0$$

$$15x^4-\left(6x^4 6y^5\frac{dy}{dx}+y^6 24x^3\right)+6y^2\frac{dy}{dx}+24x^2-35y^4\frac{dy}{dx}+0=0$$

$$15x^4-36x^4y^5\frac{dy}{dx}-24x^3y^6+6y^2\frac{dy}{dx}+24x^2-35y^4\frac{dy}{dx}=0$$

$$-36x^4y^5\frac{dy}{dx}+6y^2\frac{dy}{dx}-35y^4\frac{dy}{dx}=-15x^4+24x^3y^6-24x^2$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-36x^4y^5+6y^2-35y^4\right)=-15x^4+24x^3y^6-24x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-15x^4+24x^3y^6-24x^2}{-36x^4y^5+6y^2-35y^4}$$

3) $8x^4-2x^3y^4+7x^7-10x^3y-11=0$

Solución:

$$\frac{d}{dx}8x^4-\frac{d}{dx}2x^3y^4+\frac{d}{dx}7x^7-\frac{d}{dx}10x^3y-\frac{d}{dx}11=\frac{d}{dx}0$$

$$32x^3-\left(2x^3 4y^3\frac{dy}{dx}+y^4 6x^2\right)+49x^6-\left(10x^3\frac{dy}{dx}+y30x^2\right)-0=0$$

$$32x^3-8x^3y^3\frac{dy}{dx}-6x^2y^4+49x^6-10x^3\frac{dy}{dx}-30x^2y=0$$
$$-8x^3y^3\frac{dy}{dx}-10x^3\frac{dy}{dx}=-32x^3+6x^2y^4-49x^6+30x^2y$$
$$\frac{dy}{dx}\left(-8x^3y^3-10x^3\right)=-32x^3+6x^2y^4-49x^6+30x^2y$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-32x^3+6x^2y^4-49x^6+30x^2y}{-8x^3y^3-10x^3}$$

4) $6x^3-11x^2y^3+5y^4-8x^3y^5+5x-11=0$

Solución:

$$\frac{d}{dx}6x^3-\frac{d}{dx}11x^2y^3+\frac{d}{dx}5y^4-\frac{d}{dx}8x^3y^5+\frac{d}{dx}5x-\frac{d}{dx}11=\frac{d}{dx}0$$
$$18x^2-\left(11x^23y^2\frac{dy}{dx}+y^322x\right)+20y^3\frac{dy}{dx}-\left(8x^35y^4\frac{dy}{dx}+y^524x^2\right)+5-0=0$$
$$18x^2-33x^2y^2\frac{dy}{dx}-22xy^3+20y^3\frac{dy}{dx}-40x^3y^4\frac{dy}{dx}-24x^2y^5+5=0$$
$$-33x^2y^2\frac{dy}{dx}+20y^3\frac{dy}{dx}-40x^3y^4\frac{dy}{dx}=-18x^2+22xy^3+24x^2y^5-5$$
$$\frac{dy}{dx}\left(-33x^2y^2+20y^3-40x^3y^4\right)=-18x^2+22xy^3+24x^2y^5-5$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-18x^2+22xy^3+24x^2y^5-5}{-33x^2y^2+20y^3-40x^3y^4}$$

5) $8x^4+12x^3y^2+9y^2-10xy+6x-4=0$

Solución:

$$\frac{d}{dx}8x^4+\frac{d}{dx}12x^3y^2+\frac{d}{dx}9y^2-\frac{d}{dx}10xy+\frac{d}{dx}6x-\frac{d}{dx}4=\frac{d}{dx}0$$
$$32x^3+\left(12x^32y\frac{dy}{dx}+y^236x^2\right)+18y\frac{dy}{dx}-\left(10x\frac{dy}{dx}+y10\right)+6-0=0$$
$$32x^3+24x^3y\frac{dy}{dx}+36x^2y^2+18y\frac{dy}{dx}-10x\frac{dy}{dx}-10y+6=0$$
$$24x^3y\frac{dy}{dx}+18y\frac{dy}{dx}-10x\frac{dy}{dx}=-32x^3-36x^2y^2+10y-6$$
$$\frac{dy}{dx}\left(24x^3y+18y-10x\right)=-32x^3-36x^2y^2+10y-6$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-32x^3-36x^2y^2+10y-6}{24x^3y+18y-10x}$$

Si se tiene una función $f(x,y)=0$, se conoce como *derivada parcial de* $f$ *con respecto a* $x$ a la derivada de la función, sólo considerando a $x$ como variable y lo demás como constante[3]. Se denota como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Similarmente, la *derivada parcial de* $f$ *con respecto a* $y$ es la derivada de la función, sólo considerando a $y$ como variable y lo demás como constante. Se denota como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

Ejemplos.

Obtener $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de las siguientes funciones:

1) $3x^2+7x^4y^2+8x^2y^6-9y^5+6x+2=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+28x^3y^2+16xy^6+6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=14x^4y+48x^2y^5-45y^4$$

2) $4x^4y^3-6x^2+3y^7-9x^2y^4-12=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=16x^3y^3-12x-18xy^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=12x^4y^2+21y^6-36x^2y^3$$

Dada una función implícita de la forma $f(x,y)$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ puede obtenerse muy fácilmente a través de la aplicación de derivadas parciales, por medio de la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Ejemplos.

Aplicando derivadas parciales, obtener $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones expresadas en forma implícita:

[3] La definición de derivada parcial es mucho más formal y amplia que lo expuesto. El concepto dado aquí es sólo para poseer otro recurso para resolver derivadas expresadas en forma implícita. En cursos posteriores de Cálculo se comprenderá el importante significado y utilidad de una derivada parcial.

1) $5x^4 - 12x^3y^2 + 9y^2 - 10 = 0$
Solución:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-20x^3 + 36x^2y^2}{-24x^3y + 18y}$$

2) $3x^5 - 6x^4y^6 + 2y^3 + 8x - 7y^5 + 15 = 0$
Solución:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-15x^4 + 24x^3y^6 - 8}{-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4}$$

Ejemplos.
Comprobar los resultados de los primeros cinco ejercicios resueltos de este subtema.

1) $4x^2y^3 + 5x^4 - 2y^5 - 12 = 0$
Solución:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-8xy^3 - 20x^3}{12x^2y^2 - 10y^4}$$

2) $3x^5 - 6x^4y^6 + 2y^3 + 8x^3 - 7y^5 + 15 = 0$
Solución:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-15x^4 + 24x^3y^6 - 24x^2}{-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4}$$

3) $8x^4 - 2x^3y^4 + 7x^7 - 10x^3y - 11 = 0$
Solución:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-32x^3 + 6x^2y^4 - 49x^6 + 30x^2y}{-8x^3y^3 - 10x^3}$$

4) $6x^3 - 11x^2y^3 + 5y^4 - 8x^3y^5 + 5x - 11 = 0$
Solución:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-18x^2 + 22xy^3 + 24x^2y^5 - 5}{-33x^3y^2 + 20y^3 - 40x^3y^4}$$

5) $8x^4 + 12x^3y^2 + 9y^2 - 10xy + 6x - 4 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-32x^3 - 36x^2y^2 + 10y - 6}{24x^3y + 18y - 10x}$$

## III.17 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Dada una función expresada en forma paramétrica, tal y como se definió en el tema I.6, de la forma:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= f(t) \end{aligned}\right\}$$

Su derivada viene dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ejemplos.

Obtener la derivada de las siguientes funciones expresadas en forma paramétrica:

1) $$\left.\begin{aligned} x &= 4t^2 - 6t + 9 \\ y &= 5t^3 - 7t^2 - 10t + 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8t - 6}{15t^2 - 14t - 10}$$

2) $$\left.\begin{aligned} x &= \left(8t^3 - 11t^2 - 13\right)^4 \\ y &= \left(12t^4 - 13t^2\right)\left(4t^2 - 5t^5\right) \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Para hallar $\frac{dx}{dt}$ se aplica la regla de la cadena y para encontrar $\frac{dy}{dt}$ se aplica la regla del producto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(12t^4 - 13t^2\right)\left(8t - 25t^4\right) + \left(4t^2 - 5t^5\right)\left(48t^3 - 26t\right)}{4\left(48t^3 - 11t^2 - 13\right)^3\left(24t^2 - 22t\right)}$$

3) $\left.\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{t} \\ y &= \sqrt[8]{5t} \end{aligned}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x &= t^{\frac{1}{3}} \\ y &= (5t)^{\frac{1}{8}} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{5}{8\sqrt[8]{(5t)^7}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}}$$

4) $\left.\begin{aligned} x &= -\frac{3}{t^5} \\ y &= \frac{2}{\sqrt{t}} \end{aligned}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x &= -3t^{-5} \\ y &= 2t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{t^3}}}{\frac{15}{t^6}}$$

5) $\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{2-9t^4} \\ y &= \frac{4t-8}{6t^3-7t^5} \end{aligned}\right\}$

Solución:

Para hallar $\frac{dx}{dt}$ se aplica la regla $\frac{d}{dt}\sqrt{u}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{dt}$ y para encontrar $\frac{dy}{dt}$ se aplica la regla del cociente:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{(6t^3-7t^5)(4)-(4t-8)(18t^2-35t^4)}{(6t^3-7t^5)^2}}{-\frac{18t^3}{\sqrt{2-9t^4}}}$$

La segunda derivada de una función expresada en forma paramétrica está dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

Ejemplos.
Obtener la segunda derivada de las siguientes funciones expresadas en forma paramétrica:

1) $\left.\begin{aligned} x &= 4t^2-5t+1 \\ y &= 2t^3-21 \end{aligned}\right\}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2}{8t-5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{6t^2}{8t-5}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{(8t-5)(12t)-(6t^2)(8)}{(8t-5)^2}\cdot\frac{1}{8t-5}=\frac{96t^2-60t-48t^2}{(8t-5)^3}$$

$$=\frac{48t^2-60t}{(8t-5)^3}$$

2) $\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{t} \\ y &= 3t^5 \end{aligned}\right\}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{15t^4}{-\frac{1}{t^2}}=-15t^6$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(-15t^6\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-90t^5\cdot\left(-t^2\right)=90t^7$$

## III.18 DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS

Sea una función $y=f(x)$ en el intervalo abierto $(a,b)$ cuya derivada no cambia de signo. Si su función inversa es $x=g(y)$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ viene dada por:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Ejemplos.
Obtener la derivada de la función inversa de:

1) $f(x)=8x-6$
Solución:
Forma 1. Obteniendo la función inversa:
$$x=8y-6 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{x+6}{8}$$
$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{8}$$
Forma 2. Aplicando la fórmula:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{8}$$

2) $f(x)=x^2-5$
Solución:
Forma 1. Obteniendo la función inversa:
$$x=y^2-5 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x+5}$$
$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$
Forma 2. Aplicando la fórmula:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

3) $f(x)=\sqrt{4x+1}$
Solución:
Forma 1. Obteniendo la función inversa:
$$x=\sqrt{4y+1} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{x^2-1}{4}$$
$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$$
Forma 2. Aplicando la fórmula:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{4}{2\sqrt{4y+1}}}=\frac{2\sqrt{4y+1}}{4}=\frac{x}{2}$$

Ejemplos.
Aplicando la expresión $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ obtener la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=(x+3)^2$

Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=(y+3)^2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x}-3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2(y+3)}=\frac{1}{2\left(\sqrt{x}-3+3\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) $f(x)=\frac{5}{x}$
Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=\frac{5}{y} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{5}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{-5}{y^2}}=-\frac{y^2}{5}=-\frac{\left(\frac{5}{x}\right)^2}{5}=-\frac{25}{5x^2}=-\frac{5}{x^2}$$

3) $f(x)=\frac{2}{x-17}$
Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=\frac{2}{y-17} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{2}{x}+17$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\frac{2}{(y-17)^2}}=-\frac{(y-17)^2}{2}=-\frac{\left(\frac{2}{x}-17+17\right)^2}{2}=-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{2}=-\frac{2}{x^2}$$

4) $f(x)=\sqrt[3]{4x^2+10}$ .
Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=\sqrt[3]{4y^2+10} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{\frac{x^3-10}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{3}\left(4y^2+10\right)^{-\frac{2}{3}}(8y)}=\frac{3\sqrt[3]{\left(4y^2+10\right)^2}}{8y}=\frac{3x^2}{8\sqrt{\frac{x^3-10}{4}}}$$

## III.19 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

Las funciones trigonométricas o circulares directas fueron expuestas con amplitud en el capítulo II del libro de Matemáticas V de esta misma serie. Las derivadas de estas funciones se deducen a continuación:

1) $\frac{d}{dx}(sen\, x)=\cos x$

Demostración:

1$^{er}$ paso: $f(x+\Delta x)=sen(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=sen(x+\Delta x)-sen\, x$

considerando la identidad trigonométrica: $sen(a+b)-sen\, a=2\cos\left(a+\frac{1}{2}b\right)\cdot sen\frac{1}{2}b$

se tiene: $f(x+\Delta x)-f(x)=2\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot sen\frac{1}{2}\Delta x$

3$^{er}$ paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot sen\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

pero se sabe que: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}=1$

$$\Rightarrow\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot 1=\cos x$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}(sen\, x)=\cos x$$

2) $\frac{d}{dx}(\cos x)=-sen\, x$

Demostración:

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos x=sen\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$, se tiene:

$$f(x)=sen\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$$

derivando la función:

$$\frac{d}{dx}sen\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)=(-1)\cos\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$$

pero se sabe que: $sen\, x=\cos\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\cos x)=-sen\, x$$

3) $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$

Demostración:

$$f(x)=\frac{sen\,x}{\cos x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x)=\frac{\cos x(\cos x)-sen\ x(-sen\,x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+sen^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

4) $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$

Demostración:

$$f(x)=\frac{\cos x}{sen\,x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x)=\frac{sen\,x(-sen\,x)-\cos\ x(\cos x)}{(sen\,x)^2}=\frac{-sen^2 x-\cos^2 x}{sen^2 x}=\frac{-1(sen^2 x+\cos^2 x)}{sen^2 x}$$

$$=\frac{-1}{sen^2 x}=-\csc^2 x$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$$

5) $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\cdot\tan x$

Demostración:

$$f(x)=\frac{1}{\cos x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x)=-\frac{(-sen\,x)}{(\cos x)^2}=\frac{sen\,x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{sen\,x}{\cos x}=\sec x\cdot\tan x$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\cdot\tan x$$

6) $\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cdot\cot x$

Demostración:

$$f(x)=\frac{1}{sen\,x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x) = -\frac{(\cos x)}{(sen\,x)^2} = -\frac{\cos x}{sen^2 x} = -\frac{1}{sen\,x}\cdot\frac{\cos x}{sen\,x} = -\csc x \cdot \cot x$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x$$

Aplicando la regla de la cadena, en donde $u = f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx} sen\,u = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$

2) $\frac{d}{dx} \cos u = -sen\,u \cdot \frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dx}$

5) $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \cdot \tan u \cdot \frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cdot \cot u \cdot \frac{du}{dx}$

Ejemplos.
Derivar las siguientes funciones trigonométricas.

1) $y = sen\,4x$

$$\frac{dy}{dx} = 4\cos 4x$$

2) $y = 3\cos 9x$

$$\frac{dy}{dx} = 3(9)(-sen\,9x) = -27sen\,9x$$

3) $y = 5\tan 2x^3$

$$\frac{dy}{dx} = 5(6x^2)\sec^2 2x^3 = 30x^2\sec^2 2x^3$$

4) $y = 6\cot(5x^2 - 8x^7)$

$$\frac{dy}{dx} = -6(10x - 56x^6)\csc^2(5x^2 - 8x^7) = (-60x + 336x^6)\csc^2(5x^2 - 8x^7)$$

5) $y = 8\sec 2x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 8(8x^3)\sec 2x^4 \tan 2x^4 = 64x^3 \sec 2x^4 \tan 2x^4$$

6) $y = 4\csc(3x^5 - 6x)$

$$\frac{dy}{dx} = -4(15x^4 - 6)\csc(3x^5 - 6x)\cot(3x^5 - 6x) = (-60x^4 + 24)\csc(3x^5 - 6x)\cot(3x^5 - 6x)$$

7) $y = 12sen(4x^2 - 9x + 7)$

$$\frac{dy}{dx}=12(8x-9)\cos\left(4x^2-9x+7\right)=(96x-108)\cos\left(4x^2-9x+7\right)$$

8) $y=-6\cos\left(10x^3-8x+3\right)^5$

$$\frac{dy}{dx}=30\left(10x^3-8x+3\right)^4\left(30x^2-8\right)sen\left(10x^3-8x+3\right)^5$$

9) $y=\sqrt{\tan 3x}$

$$y=\left(\tan 3x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\tan 3x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(3\sec^2 3x\right)=\frac{3\sec^2 3x}{2\sqrt{\tan 3x}}$$

10) $y=\left(4\cot 2x^2\right)\left(\sec 5x^4\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(4\cot 2x^2\right)\left(20x^3\sec 5x^4\tan 5x^4\right)+\left(\sec 5x^4\right)\left(-4(4x)\csc^2 2x^2\right)$$

$$=80x^3\cot 2x^2\sec 5x^4\tan 5x^4-16x\sec 5x^4\csc^2 2x^2$$

11) $y=\dfrac{7\csc\ 2x^3}{-5sen\,8x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(-5sen8x\right)\left(-7\left(6x^2\right)\csc 2x^3\cot 2x^3\right)-\left(7\csc 2x^2\right)\left(-5(8)\cos 8x\right)}{\left(-5sen8x\right)^2}$$

$$=\frac{210x^2sen8x\csc 2x^3\cot 2x^3+280\csc 2x^2\cos 8x}{25sen^2 8x}$$

12) $y=sen\,x^2$

$$\frac{dy}{dx}=2x\cos x^2$$

13) $y=sen^2 x$

$$y=\left(sen\,x\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=2sen\,x\cdot\cos x$$

Nótese como las funciones de los ejercicios 12 y 13, aunque aparentemente son similares, son muy diferentes: en el primer caso el cuadrado está afectando al argumento de la función. En el segundo caso, el cuadrado está afectando a la función seno. En conclusión, sus derivadas son totalmente distintas. Algo muy similar sucede con los siguientes dos ejercicios:

14) $y=\cos x^3$

$$\frac{dy}{dx}=-3x^2sen\,x^3$$

15) $y = \cos^3 x$

$y = (\cos x)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos^2 x\,(-\,sen\,x) = -3\cos^2 x\,sen\,x$$

16) $y = \cot^7 9x^4$

$y = \left(\cot 9x^4\right)^7$

$$\frac{dy}{dx} = 7\cot^6 9x^4\left(-36x^3 \csc^2 9x^4\right) = -252x^3 \cot^6 9x^4 \csc^2 9x^4$$

17) $y = \left(10\sec 15x^3\right)\left(8\tan 9x\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \left(10\sec 15x^3\right)\left(8(9)\sec^2 9x\right) + \left(8\tan 9x\right)\left(10\left(45x^2\right)\sec 15x^3 \tan 15x^3\right)$$

$$= 720\sec 15x^3 \sec^2 9x + 3600x^2 \tan 9x \sec 15x^3 \tan 15x^3$$

18) $y = \dfrac{sen\,10x^3}{\cos 10x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\cos 10x^3\right)\left(30x^2 \cos 10x^3\right) - \left(sen\,10x^3\right)\left(-30x^2 sen\,10x^3\right)}{\left(\cos 10x^3\right)^2}$$

$$= \frac{30x^2 \cos^2 10x^3 + 30x^2 sen^2 10x^3}{\cos^2 10x^3} = \frac{30x^2\left(\cos^2 10x^3 + sen^2 10x^3\right)}{\cos^2 10x^3} = \frac{30x^2}{\cos^2 10x^3} = 30x^2 \sec^2 10x^3$$

19) $y = \tan 10x^3$

$$\frac{dy}{dx} = 30x^2 \sec^2 10x^3$$

Se observa como la derivada de las funciones de los ejercicios 18 y 19 son iguales. Eso significa que aplicar convenientemente identidades trigonométricas puede simplificar notablemente el proceso de derivación. Un caso similar sucede con las derivadas de los ejercicios 20 y 21:

20) $y = \dfrac{1}{sen^5\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)}$

$y = sen^{-5}\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)$

$$\frac{dy}{dx} = -5\left(44x^3 - 12x\right)sen^{-6}\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)\cos\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)$$

pero como $\dfrac{\cos u}{sen\,u} = \cot u$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5\left(44x^3 - 12x\right)\cos\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)}{sen^6\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)} = -\frac{5\left(44x^3 - 12x\right)\cot\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)}{sen^5\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)}$$

y $\dfrac{1}{sen\,u} = \csc u$ , se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=-5\left(44x^{3}-12x\right)\cot\left(11x^{4}-6x^{2}+8\right)\csc^{5}\left(11x^{4}-6x^{2}+8\right)$$

21) $y=\csc^{5}\left(11x^{4}-6x^{2}+8\right)$

$$\frac{dy}{dx}=5\left(44x^{3}-12x\right)\csc^{4}\left(11x^{4}-6x+8\right)\cdot\left(-\csc\left(11x^{4}-6x^{2}+8\right)\cot\left(11x^{4}-6x^{2}+8\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-5\left(44x^{3}-12x\right)\cot\left(11x^{4}-6x^{2}+8\right)\cdot\csc^{5}\left(11x^{4}-6x^{2}+8\right)$$

## III.20 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas inversas definidas poseen reglas de derivación. A continuación se deducen las seis fórmulas considerando sus respectivos campos de variación.

1) $\frac{d}{dx}\left(sen^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

Demostración:

$y=sen^{-1}x \quad\Rightarrow\quad x=sen\,y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}sen\,y=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$sen^{2}y+\cos^{2}y=1 \quad\Rightarrow\quad x^{2}+\cos^{2}y=1 \quad\Rightarrow\quad \cos y=\sqrt{1-x^{2}}$$

$$1=\sqrt{1-x^{2}}\cdot\frac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(sen^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

2) $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

Demostración:

$y=\cos^{-1}x \quad\Rightarrow\quad x=\cos y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\cos y=-sen\,y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=-sen\,y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$sen^{2}y+\cos^{2}y=1 \quad\Rightarrow\quad sen^{2}y+x^{2}=1 \quad\Rightarrow\quad sen\,y=\sqrt{1-x^{2}}$$

$$1=-\sqrt{1-x^{2}}\cdot\frac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right)=\frac{1}{1+x^2}$

Demostración:

$y=\tan^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x=\tan y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\tan y=\sec^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=\sec^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\sec^2 y=1+\tan^2 y \quad \Rightarrow \quad \sec^2 y=1+x^2$$

$$1=\left(1+x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right)=\frac{1}{1+x^2}$$

4) $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right)=\frac{-1}{1+x^2}$

Demostración:

$y=\cot^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x=\cot y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\cot y=-\csc^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=-\csc^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\csc^2 y=1+\cot^2 y \quad \Rightarrow \quad \csc^2 y=1+x^2$$

$$1=-\left(1+x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right)=\frac{-1}{1+x^2}$$

5) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Demostración:

$y=\sec^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x=\sec y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\sec y=\sec y\cdot\tan y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=\sec y\cdot\tan y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y \quad \Rightarrow \quad \tan^2 y = \sec^2 y - 1 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$1 = x \cdot \sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

6) $\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

Demostración:

$y = \csc^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x = \csc y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}\csc y = -\csc y \cdot \cot y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = -\csc y \cdot \cot y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\csc^2 y = 1 + \cot^2 y \quad \Rightarrow \quad \cot^2 y = \csc^2 x - 1 \quad \Rightarrow \quad \cot y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$1 = -x \cdot \sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Aplicando la regla de la cadena, en donde $u = f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx} sen^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

2) $\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = \frac{-1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

5) $\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx} \csc^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \frac{du}{dx}$

Ejemplos.

Derivar las siguientes funciones trigonométricas inversas:

1) $y = sen^{-1} 5x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (5x)^2}}(5) = \frac{5}{\sqrt{1 - 25x^2}}$$

2) $y = \cos^{-1} \frac{1}{3} x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}x\right)^2}}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-1}{3\sqrt{1-\frac{1}{9}x^2}}$$

3) $y=\tan^{-1}2x^3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\left(2x^3\right)^2}\left(6x^2\right)=\frac{6x^2}{1+4x^6}$$

4) $y=\cot^{-1}10x^4$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1+\left(10x^4\right)^2}\left(40x^3\right)=\frac{-40x^3}{1+100x^8}$$

5) $y=2\sec^{-1}\left(13x^2-12x+1\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\left(13x^2-12x+1\right)\sqrt{\left(13x^2-12x+1\right)^2-1}}\left(26x-12\right)$$

$$=\frac{52x-24}{\left(13x^2-12x+1\right)\sqrt{\left(13x^2-12x-12\right)^2-1}}$$

6) $y=-9\csc^{-1}\left(14x^3-4x\right)$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-9}{\left(14x^3-4x\right)\sqrt{\left(14x^3-4x\right)^2-1}}\left(42x^2-4\right)$$

$$=\frac{378x^2-36}{\left(14x^3-4x\right)\sqrt{\left(14x^3-4x\right)^2-1}}$$

7) $y=4sen^{-1}3x^5\cdot\cos^{-1}8x^4$

$$\frac{dy}{dx}=4sen^{-1}3x^5\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\left(8x^4\right)^2}}\left(32x^3\right)+\cos^{-1}8x^4\cdot\frac{4}{\sqrt{1-\left(3x^5\right)^2}}\left(15x^4\right)$$

$$=-4sen^{-1}3x^5\cdot\frac{32x^3}{\sqrt{1-64x^8}}+\cos^{-1}8x^4\cdot\frac{60x^4}{\sqrt{1-9x^{10}}}$$

8) $y=\frac{2\csc^{-1}4x}{5\tan^{-1}3x^7}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5\tan^{-1}3x^7\cdot\frac{-2}{4x\sqrt{(4x)^2-1}}(4)-2\csc^{-1}4x\cdot\frac{5}{1+\left(3x^7\right)^2}\left(21x^6\right)}{\left(5\tan^{-1}3x^7\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{10\tan^{-1}3x^7}{x\sqrt{16x^2-1}}-\frac{210x^6\csc^{-1}4x}{1+9x^{14}}}{\left(5\tan^{-1}3x^7\right)^2}$$

9) $y=\sec^{-1}\sec\left(5x^2+7x-4\right)$

Por ser funciones inversas, se eliminan:

$$y=5x^2+7x-4$$

$$\frac{dy}{dx}=10x+7$$

10) $y=\sqrt[6]{\cot^{-1}2x^2}$

$$y=\left(\cot^{-1}2x^2\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6}\left(\cot^{-1}2x^2\right)^{-\frac{5}{6}}\cdot\frac{-1}{1+\left(2x^2\right)^2}(4x)=-\frac{4x}{6\sqrt[6]{\left(\cot^{-1}2x^2\right)^5}\left(1+4x^4\right)}$$

## III.21 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Las reglas de derivación para las funciones exponenciales y logarítmicas se deducen a continuación:

1) $\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right)=\frac{1}{x}\log_a e$

Demostración:

1er paso: $f(x+\Delta x)=\log_a(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right)=\frac{1}{x}\log_a e$$

2) $\frac{d}{dx}\left(\ln x\right)=\frac{1}{x}$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

para este caso: $a=e$

$$f'(x)=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$$

3) $\frac{d}{dx}a^x=a^x\cdot\ln a$

Demostración:

$$y=a^x \quad \Rightarrow \quad \ln y=\ln a^x=x\ln a$$

derivando con respecto a $x$:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\ln a \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=y\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(a^x\right)=a^x\cdot\ln a$$

4) $\frac{d}{dx}e^x=e^x$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right)=a^x\cdot\ln a$$

para este caso: $a=e$

$$f'(x)=e^x\cdot\ln e=e^x(1)=e^x$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$$

Aplicando la regla de la cadena, en donde $u=f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx}\log_a u=\frac{1}{u}\log_a e\cdot\frac{du}{dx} \qquad (a>0,\ a\neq 1)$

2) $\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}a^u=a^u\ln u\cdot\frac{du}{dx} \qquad (a>0)$

4) $\frac{d}{dx}e^u=e^u\cdot\frac{du}{dx}$

Ejemplos.

Derivar las siguientes funciones:

1) $y=\log_3\left(x^4-7x^2-16\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-14x}{x^4-7x^2-16}\log_3 e$$

2) $y = \log_5 \left(sen\,3x^4\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^3 \cos 3x^4}{sen\,3x^4} \log_5 e$$

3) $y = \ln\left(2x^2 - x - 1\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x-1}{2x^2 - x - 1}$$

4) $y = \ln \cos 5x^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-20x^3\, sen 5x^4}{\cos 5x^4} = -20x^3 \tan 5x^4$$

5) $y = 7^{5x}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(7^{5x} \ln(5x)\right)5$$

6) $y = 4^{\left(3x^2 - 9x - 1\right)}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(4^{\left(3x^2 - 9x - 1\right)} \ln\left(3x^2 - 9x - 1\right)\right)\left(6x - 9\right)$$

7) $y = e^{2x^5}$

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4\, e^{2x^5}$$

8) $y = e^{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

9) $y = \log_2 \left(3x^2 - 4x + 7\right)^5$

Aplicando la propiedad: $\log_a x^n = n \log_a x$ se tiene:

$$y = 5 \log_2 \left(3x^2 - 4x + 7\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5(6x-4)}{3x^2 - 4x + 7} \log_2 e$$

10) $y = \ln\left(6x^2 - 8x\right)\left(5x^3 - 2x^2\right)$

Aplicando la propiedad:

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ se tiene:

$$y = \ln\left(6x^2 - 8x\right) + \ln\left(5x^3 - 2x^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x - 8}{6x^2 - 8x} + \frac{15x^2 - 4x}{5x^3 - 2x^2}$$

11) $y = \ln \frac{3^{8x^2}}{4e^{3x^5}}$

Aplicando la propiedad: $\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$ se tiene:

$$y = \ln 3^{8x^2} - \ln 4e^{3x^5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(3^{8x^2} \ln 8x^2\right)16x}{3^{8x^2}} - \frac{4e^{3x^5}\left(15x^4\right)}{4e^{3x^5}} = 16x \ln 8x^2 + 15x^4$$

12) $y = \ln\left( \frac{\left(\sqrt[5]{\log_4 \left(6x^3\right)}\right) \cdot \cos^{-1} 3x^6}{\left(4sen\, 2x\right)^3} \right)$

Aplicando convenientemente las propiedades de logaritmos se tiene:

$$y = \ln \sqrt[5]{\log_4 6x^3} \cdot \cos^{-1} 3x^6 - \ln\left(4sen\, 2x\right)^3$$

$$y = \ln \sqrt[5]{\log_4 6x^3} + \ln \cos^{-1} 3x^6 - 3\ln 4sen\, 2x$$

$$y = \ln\left(\log_4 6x^3\right)^{\frac{1}{5}} + \ln \cos^{-1} 3x^6 - 3\ln 4sen\, 2x$$

$$y = \frac{1}{5} \ln\left(\log_4 6x^3\right) + \ln \cos^{-1} 3x^6 - 3\ln 4sen\, 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5} \frac{\frac{18x^2}{6x^3} \log_4 e}{\log_4 6x^3} + \frac{\frac{-18x^5}{\sqrt{1-\left(3x^6\right)^2}}}{\cos^{-1} 3x^6} - \frac{24\cos 2x}{4sen\, 2x}$$

$$= \frac{18 \log_4 e}{30x \log_4 6x^3} - \frac{18x^5}{\left(\cos^{-1} 3x^6\right)\sqrt{1-9x^{12}}} - 6\cot 2x$$

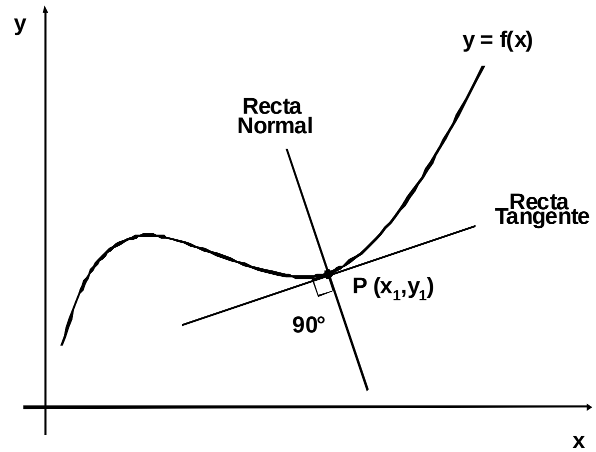
## III.22 RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL DE UNA CURVA

Si una función $y = f(x)$ posee una derivada en el punto $x_1$, la curva tiene una tangente en $P(x_1, y_1)$ cuya pendiente es: $m_1 = \tan\theta = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} = f'(x_1)$.

Se sabe que la ecuación de la recta que pasa por un punto y con una pendiente dada es: $y - y_1 = m(x - x_1)$. Por lo tanto, si se sustituye la pendiente por la derivada, la ecuación de la *recta tangente* en un punto de una curva es:

$$y - y_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} (x - x_1)$$

Si $m = 0$ tiene tangente horizontal a la curva. Si $m = \infty$ tiene tangente vertical a la curva.




Una *recta normal* a una curva en uno de sus puntos es la recta que pasando por dicho punto es perpendicular a la recta tangente en él.

La condición de perpendicular entre dos rectas es: $m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}}$

La ecuación de la recta normal en el punto $P(x_1, y_1)$ es:

$$y - y_1 = -\left.\frac{1}{m_1}\right|_{x=x_1}(x - x_1)$$

Ejemplos.
Hallar las ecuaciones de las recta tangente y normal de las siguientes curvas en el punto indicado.

1) $y = 3x^2 - 5x + 4 \qquad P(2,6)$
Solución:
$m_1 = \frac{dy}{dx} = 6x - 5\Big|_{x=2} = 6(2) - 5 = 12 - 5 = 7$
$y - 6 = 7(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y - 6 = 7x - 14 \quad \Rightarrow \quad 7x - y - 8 = 0$ (recta tangente).
$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{7}$
$y - 6 = -\frac{1}{7}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 7(y - 6) = -(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 7y - 42 = -x + 2$
$\Rightarrow \quad x + 7y - 44 = 0$ (recta normal).

2) $y = 9x^3 - 12x - 5 \qquad P(-1, -2)$
Solución:
$m_1 = \frac{dy}{dx} = 27x^2 - 12\Big|_{x=-1} = 27(-1)^2 - 12 = 27 - 12 = 15$
$y - (-2) = 15(x - (-1)) \quad \Rightarrow \quad y + 2 = 15(x + 1) \quad \Rightarrow \quad y + 2 = 15x + 15$

$\Rightarrow \quad 15x - y + 13 = 0$ (recta tangente).

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{15}$$

$$y - (-2) = -\frac{1}{15}(x - (-1)) \quad \Rightarrow \quad 15(y+2) = -(x+1) \quad \Rightarrow \quad 15y + 30 = -x - 1$$

$\Rightarrow \quad x + 15y + 31 = 0$ (recta normal).

3) $y = \frac{1}{x}$ $\qquad P\left(2, \frac{1}{2}\right)$

Solución:

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\bigg|_{x=2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \quad \Rightarrow \quad 4\left(y - \frac{1}{2}\right) = -(x-2) \quad \Rightarrow \quad 4y - 2 = -x + 2 \quad \Rightarrow \quad x + 4y - 4 = 0$$

(recta tangente).

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{4}} = 4$$

$$y - \frac{1}{2} = 4(x-2) \quad \Rightarrow \quad y - \frac{1}{2} = 4x - 8 \quad \Rightarrow \quad 2y - 1 = 8x - 16$$

$\Rightarrow \quad 8x - 2y - 15 = 0$ (recta normal).

4) $-x^2y + 6x - y^2x^2 + 4y - 12 = 0$ $\qquad P(0,3)$

Solución:

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{2xy - 6 + 2xy^2}{-x^2 - 2x^2y + 4}\Bigg|_{(0,3)} = \frac{2(0)(3) - 6 + 2(0)(3)^2}{-(0)^2 - 2(0)^2(3) + 4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad 2(y-3) = -3x \quad \Rightarrow \quad 2y - 6 = -3x$$

$\Rightarrow \quad 3x + 2y - 6 = 0$ (recta tangente).

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{6}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$y - 3 = \frac{2}{3}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad 3(y-3) = 2x \quad \Rightarrow \quad 3y - 9 = 2x \quad \Rightarrow \quad 2x - 3y + 9 = 0$$ (recta normal).

5) $y = -7x^4 + 12x^2 + 4x$ $\qquad P(1,9)$

Solución:

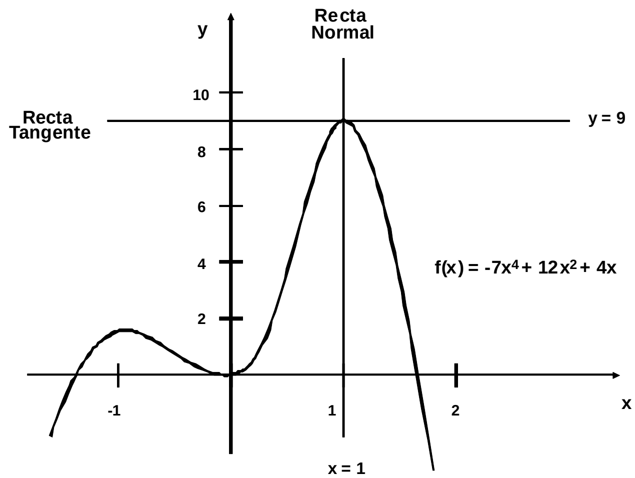
$$m_1 = \frac{dy}{dx} = -28x^3 + 24x + 4\Big|_{x=1} = -28(1)^3 + 24(1) + 4 = -28 + 24 + 4 = 0$$

$y - 9 = 0(x-1) \quad \Rightarrow \quad y - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 9$ (recta tangente).

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{0} \quad \text{(pendiente de 90°, o sea, es infinita)}$$

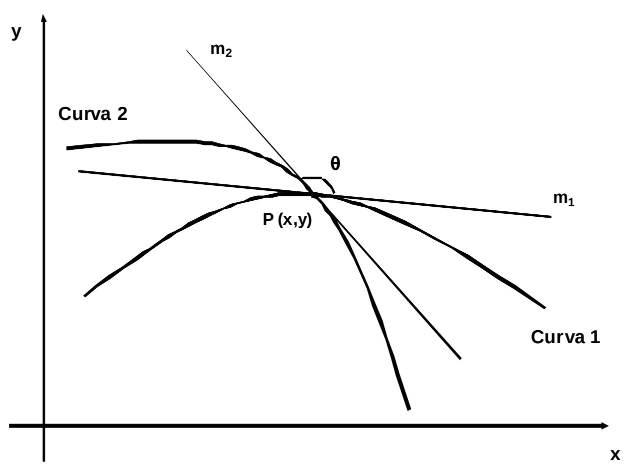
$$y - 9 = -\frac{1}{0}(x-1) \;\Rightarrow\; 0(y-9) = -(x-1) \;\Rightarrow\; 0 = -x + 1 \;\Rightarrow\; x = 1 \quad \text{(recta normal).}$$

Gráficamente, esto es:




## III.23 ÁNGULO ENTRE DOS CURVAS

Dadas dos curvas cualesquiera, el ángulo de intersección entre ellas está dado por el ángulo formado por sus tangentes en el punto de intersección.




El procedimiento para obtener el ángulo de intersección entre dos curvas es el siguiente:

1. Se calculan las coordenadas de los puntos de intersección, resolviendo las ecuaciones formadas por las funciones.
2. Se derivan las ecuaciones para encontrar las pendientes de las tangentes de las curvas para cada uno de los puntos de intersección.

3. Se aplica la siguiente expresión:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

En caso de que se obtenga un ángulo agudo $\theta$ que sea negativo, el ángulo de intersección es: $-\theta$.
En caso de que se obtenga un ángulo no agudo $\theta$ que sea positivo, el ángulo de intersección es: $180° - \theta$.
En caso de que se obtenga un ángulo no agudo $\theta$ que sea negativo, el ángulo de intersección es: $180° + \theta$.

Nótese como:

- Si las pendientes son iguales, el ángulo de intersección es cero.
- Si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, el ángulo de intersección es de $90°$, es decir las curvas son ortogonales.

Ejemplos.
Obtener el ángulo de intersección entre las siguientes curvas:

1) $f(x) = 5x - 7$ y $g(x) = -3x + 9$
Solución:
Igualando las funciones: $5x - 7 = -3x + 9 \quad \Rightarrow \quad 8x = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{16}{8} = 2$
Derivando:

$$\frac{df(x)}{dx} = 5$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = -3$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{5-(-3)}{1+(5)(-3)} = \tan^{-1}\frac{8}{-14} = \tan^{-1}(-0.5714) = -29.74°$$

$$\therefore \quad \theta_1 = 29.74°$$

2) $f(x) = -3x^2 - 10x - 14$ y $g(x) = 11x + 16$
Solución:
Igualando las funciones: $-3x^2 - 10x - 14 = 11x + 16 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 - 21x - 30 = 0$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 + 21x + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 7x + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+5)(x+2) = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = -5; \quad x_2 = -2$$

Derivando:

$$\frac{df(x)}{dx} = -6x - 10$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = 11$$

Evaluando el punto $x_1 = -5$:

$$m_1 = -6x - 10\Big|_{x=-5} = -6(-5) - 10 = 30 - 10 = 20$$

$$m_2 = 11\Big|_{x=-5} = 11$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{20-11}{1+(20)(11)} = \tan^{-1}\frac{9}{221} = \tan^{-1}(0.0407) = 2.33°$$

Evaluando el punto $x_1 = -2$:

$$m_1 = -6x - 10\big|_{x=-2} = -6(-2) - 10 = 12 - 10 = 2$$

$$m_2 = 11\big|_{x=-2} = 11$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{2-11}{1+(2)(11)} = \tan^{-1}\frac{-9}{23} = \tan^{-1}(-0.3913) = 21.37°$$

3) $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x-2)^2$

Solución:

Igualando las funciones: $x^2 = (x-2)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = x^2 - 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad 4x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{4} = 1$

Derivando:

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = 2(x-2)$$

Evaluando el punto $x = 1$:

$$m_1 = 2x\big|_{x=1} = 2(1) = 2$$

$$m_2 = 2(x-2)\big|_{x=1} = 2(1-2) = 2(-1) = -2$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\frac{2-(-2)}{1+(2)(-2)} = \tan^{-1}\frac{4}{-3} = \tan^{-1}(-1.3333) = -53.13°$$

$$\therefore \quad \theta = 53.13°$$

4) $f(x) = 4x^2 + 5x - 7$ y $g(x) = -6x^2 - 2x + 5$

Solución:

Igualando las funciones:

$$4x^2 + 5x - 7 = -6x^2 - 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 + 7x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 10, \quad b = 7, \quad c = -12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(10)(-12)}}{2(10)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+480}}{20} = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{20} = \frac{-7 \pm 23}{20}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{-7+23}{20} = \frac{16}{20} = 0.8; \quad x_2 = \frac{-7-23}{20} = -\frac{30}{20} = -1.5$$

Derivando:

$$\frac{df(x)}{dx} = 8x + 5$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = -12x - 2$$

Evaluando el punto $x_1 = 0.8$:

$$m_1 = 8x + 5\big|_{x=0.8} = 8(0.8) + 5 = 6.4 + 5 = 11.4$$

$$m_2 = -12x - 2\big|_{x=0.8} = -12(0.8) - 2 = -9.6 - 2 = -11.6$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{11.4-(-11.6)}{1+(11.4)(-11.6)} = \tan^{-1}\frac{23}{-131.24} = \tan^{-1}(-0.1752) = -9.94°$$

$$\therefore \quad \theta_1 = 9.94°$$

Evaluando el punto $x_2 = -1.5$:

$$m_1 = 8x+5\Big|_{x=-1.5} = 8(-1.5)+5 = -12+5 = -7$$

$$m_2 = -12x-2\Big|_{x=-1.5} = -12(-1.5)-2 = 18-2 = 16$$

$$\therefore \quad \theta_2 = \tan^{-1}\frac{-7-16}{1+(-7)(16)} = \tan^{-1}\frac{-23}{-111} = \tan^{-1}(0.2072) = 11.70°$$

5) $x^2+y^2-4x=0$ y $x^2+y^2-8=0$

Solución:

Igualando las funciones: $x^2+y^2-4x = x^2+y^2-8 \quad \Rightarrow \quad -4x=-8 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-8}{-4}=2$

obteniendo las ordenadas: $y=\pm\sqrt{8-x^2} = \pm\sqrt{8-2^2} = \pm\sqrt{8-4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$$\therefore \quad P_1(2,2); \quad P_2(2,-2)$$

Derivando:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{-2x+4}{2y}$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

Evaluando el punto $(2,2)$:

$$m_1 = \frac{-2x+4}{2y}\Bigg|_{(2,2)} = \frac{-2(2)+4}{2(2)} = \frac{0}{4} = 0$$

$$m_2 = \frac{-2x}{2y}\Bigg|_{(2,2)} = \frac{-2(2)}{2(2)} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\theta_1 = tan^{-1}\frac{0-(-1)}{1+0(-1)} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}(1)$$

$$\therefore \quad \theta_1 = 45°$$

Evaluando el punto $(2,-2)$:

$$m_1 = \frac{-2x+4}{2y}\Bigg|_{(2,-2)} = \frac{-2(2)+4}{2(-2)} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$m_2 = \frac{-2x}{2y}\Bigg|_{(2,-2)} = \frac{-2(2)}{2(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{0-1}{1+0(1)} = \tan^{-1}\frac{-1}{1} = \tan^{-1}(-1)$$

$$\therefore \quad \theta_2 = -45°$$

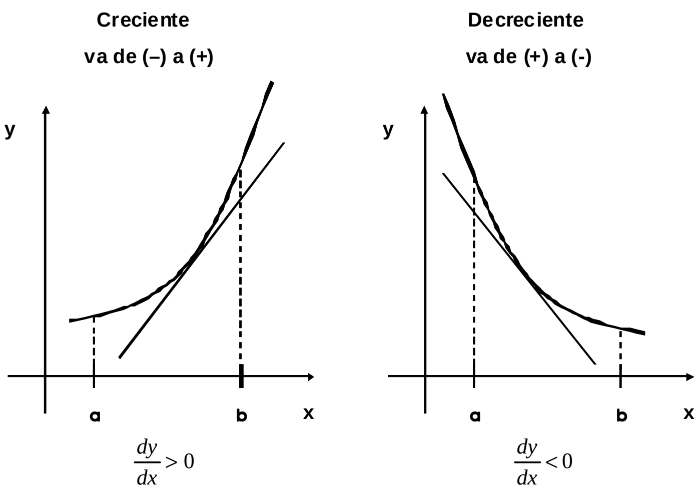
## III.24 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Función creciente

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $(a,b)$. Si se cumple que $\frac{dy}{dx} > 0$, la función es creciente.

Función decreciente

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $(a,b)$. Si se cumple que $\frac{dy}{dx} < 0$, la función es decreciente.




Criterio de la primera derivada

Si la derivada de una función es cero, se tiene un *punto critico* (PC) y existen dos casos:

1. Si pasa de signo (+) a (-), la función tiene un *máximo relativo*.
2. Si pasa de signo (-) a (+), la función tiene un *mínimo relativo*.

El máximo más grande se denomina *máximo absoluto*. El mínimo más pequeño se denomina *mínimo absoluto*.

Si $\frac{dy}{dx}$ no cambia de signo, la derivada no tiene ni máximo ni mínimo.

Criterio de la segunda derivada

- Si $\frac{dy}{dx} = 0$ y $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, la función $y = f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto en cuestión.
- Si $\frac{dy}{dx} = 0$ y $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, la función $y = f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto en cuestión.

Concavidad

Un arco de curva $y = f(x)$ es *cóncavo*, si cada uno de sus puntos están situados por encima de la tangente. Como la pendiente aumenta: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

Convexidad

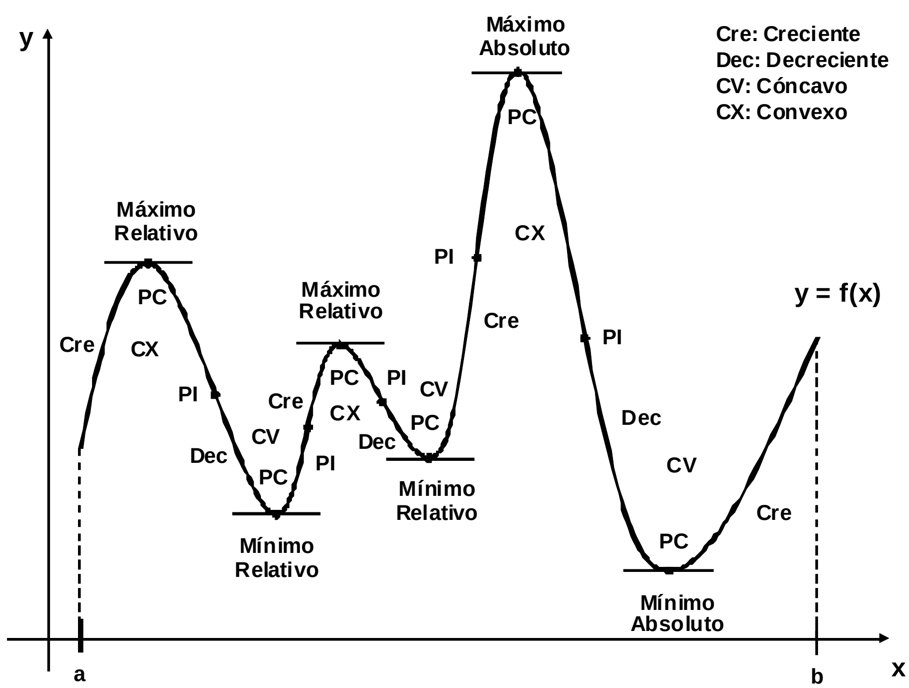
Un arco de curva $y = f(x)$ es *convexo*, si cada uno de sus puntos están situados por debajo de la tangente. Como la pendiente disminuye: $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

Punto de inflexión (PI)

Es el punto en el cual la curva pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava. Una curva tiene punto de inflexión en $x_1$ si:

i. $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_1} = 0$

ii. $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=x_1} \neq 0$, es decir, que existe su tercera derivada.



Ejemplos.
Dadas las siguientes funciones obtener (en caso de aplicar):
a) puntos críticos, sus máximos y mínimos; b) ubicar donde son crecientes y donde decrecientes; c) determinar donde son cóncavas, donde convexas y establecer sus puntos de inflexión; d) trazar la gráfica en el intervalo dado.

1) $f(x)=-x^2+6x+7$ en el intervalo $0 \le x \le 5$
Solución.

$$\frac{df(x)}{dx}=-2x+6$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$-2x+6=0 \quad \Rightarrow \quad -2x=-6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-6}{-2}=3$$

$$f(3)=-(3)^2+6(3)+7=-9+18+7=16$$

$$\therefore \quad PC(3,16)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$\frac{d^2y}{dx^2}=-2<0$ por lo tanto es un máximo y su forma es convexa. Eso implica que en $0 \le x < 3$, la función es creciente y en $3 < x \le 5$ es decreciente.

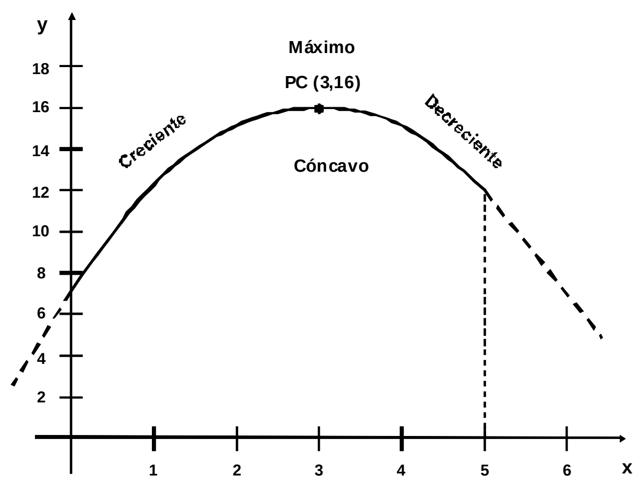
$\frac{d^3y}{dx^3}=0$, por lo tanto, no existen puntos de inflexión.

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(0)=-(0)^2+6(0)+7=0+0+7=7 \quad \Rightarrow \quad P(0,7)$$

$$f(5)=-(5)^2+6(5)+7=-25+30+7=12 \quad \Rightarrow \quad P(5,12)$$

Trazando la gráfica:




2) $f(x)=x^3-3x^2+4$ en el intervalo $-2 \le x \le 4$
Solución.

$$\frac{df(x)}{dx}=3x^2-6x$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$3x^2-6x=0 \quad \Rightarrow \quad x(3x-6)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0; \quad 3x-6=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{6}{3}=2$$

$$f(0)=(0)^3-3(0)^2+4=0-0+4=4$$

$$\therefore \quad PC_1(0,4)$$

$$f(2)=(2)^3-3(2)^2+4=8-12+4=0$$

$$\therefore \quad PC_2(2,0)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6x-6$$

$$6x-6\big|_{x=0}=6(0)-6=-6<0$$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

$$6x-6\big|_{x=2}=6(2)-6=12-6=6>0$$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

Eso implica que en $-2\le x<0$, la función es creciente, en $0<x\le 2$ es decreciente y en $2<x\le 4$ es creciente.

$\frac{d^3y}{dx^3}\neq 0$, por lo tanto, sí existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$$6x-6=0 \quad \Rightarrow \quad 6x=6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{6}{6}=1$$

$$f(1)=(1)^3-3(1)^2+4=1-3+4=2$$

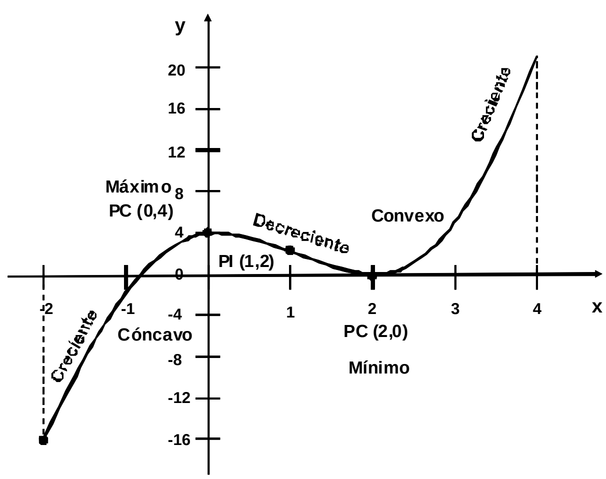
$$\therefore \quad PI(1,2)$$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2+4=-8-12+4=-16$$

$$f(4)=(4)^3-3(4)^2+4=64-48+4=20$$

Trazando la gráfica:



3) $f(x)=x^4-2x^2+1$ en el intervalo $-1.5\le x\le 1.5$
Solución.

$$\frac{df(x)}{dx}=4x^3-4x$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$4x^3-4x=0 \quad\Rightarrow\quad x(4x^2-4)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0; \quad 4x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{4}{4} \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1}$$

$$\therefore \quad x_2=1; \quad x_3=-1$$

$$f(0)=(0)^4-2(0)^2+1=0-0+1=1$$

$$\therefore \quad PC_1(0,1)$$

$$f(1)=(1)^4-2(1)^2+1=1-2+1=0$$

$$\therefore \quad PC_2(1,0)$$

$$f(-1)=(-1)^4-2(-1)^2+1=1-2+1=0$$

$$\therefore \quad PC_3(-1,0)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2-4$$

$$12x^2-4\Big|_{x=0}=12(0)^2-4=-4<0$$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

$$12x^2-4\Big|_{x=1}=12(1)^2-4=12-4=8>0$$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

$$12x^2-4\Big|_{x=-1}=12(-1)^2-4=12-4=8>0$$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.
Eso implica que en $-1.5\le x<-1$, la función es decreciente, en $-1<x<0$ es creciente, en $0<x<1$ es decreciente y en $1<x\le 1.5$ es creciente.

$\frac{d^3y}{dx^3}\ne 0$, por lo tanto, sí existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$$12x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad 12x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$x_2=0.5773; \quad x_3=-0.5773$$

$$f(0.5773)=(0.5773)^4-2(0.5773)^2+1=0.1111-0.6666+1=0.4444$$

$$\therefore \quad PI_1(0.5773,0.4444)$$

$$f(-0.5773)=(-0.5773)^4-2(-0.5773)^2+1=0.1111-0.6666+1=0.4444$$

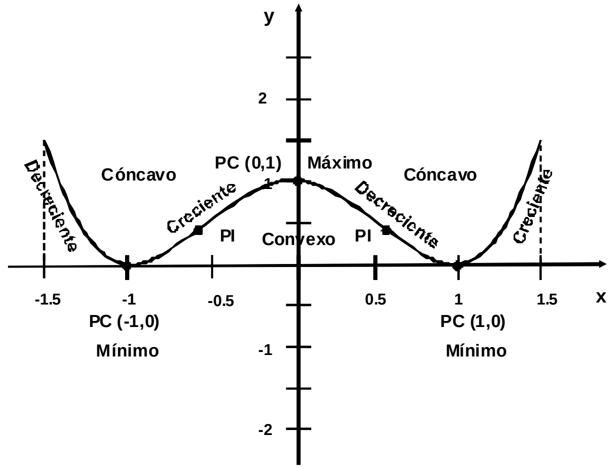
$$\therefore \quad PI_2(-0.5773,0.4444)$$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(-1.5)=(-1.5)^4-2(-1.5)^2+1=5.0625-4.5+1=1.5625$$

$$f(1.5)=(1.5)^4-2(1.5)^2+1=5.0625-4.5+1=1.5625$$

Trazando la gráfica:




4) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ en el intervalo $-1 \le x \le 5$

Solución.

$$\frac{df(x)}{dx} = -3x^2 + 12x - 9$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$-3x^2 + 12x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 3$$

$$f(1) = -(1)^3 + 6(1)^2 - 9(1) + 8 = -1 + 6 - 9 + 8 = 4$$

$$\therefore \quad PC_1(1,4)$$

$$f(3) = -(3)^3 + 6(3)^2 - 9(3) + 8 = -27 + 54 - 27 + 8 = 8$$

$$\therefore \quad PC_2(3,8)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x + 12$$

$$-6x + 12\Big|_{x=1} = -6(1) + 12 = -6 + 12 = 6 > 0$$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

$$-6x + 12\Big|_{x=3} = -6(3) + 12 = -18 + 12 = -6 \ > 0$$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

Eso implica que en $-1 \le x < 1$, la función es decreciente, en $1 < x \le 3$ es creciente y en $3 < x \le 5$ es decreciente.

$\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$, por lo tanto, si existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$$-6x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad -6x = -12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$f(2) = -(2)^3 + 6(2)^2 - 9(2) + 8 = -8 + 24 - 18 + 8 = 6$$

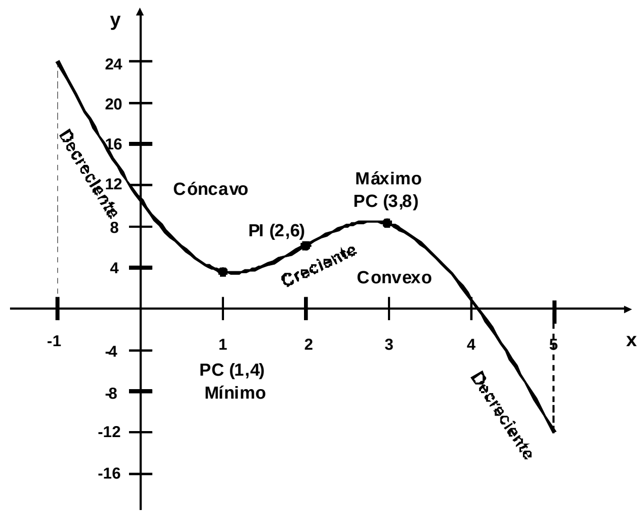
$$\therefore \quad PI(2,6)$$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$f(-1) = -(-1)^3 + 6(-1)^2 - 9(-1) + 8 = 1 + 6 + 9 + 8 = 24$

$f(5) = -(5)^3 + 6(5)^2 - 9(5) + 8 = -125 + 150 - 45 + 8 = -12$

Trazando la gráfica:




5) $f(x) = x^3 + 3x$ en el intervalo $-3 \leq x \leq 3$

Solución.

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 3$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$3x^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{3}{3} = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1}$$

Como no está definido ese valor en los números reales, no se tienen puntos críticos. Eso significa que no hay ni máximos ni mínimos.

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3) = -27 - 9 = -36$

$f(3) = (3)^3 + 3(3) = 27 + 9 = 36$

En la siguiente gráfica, se muestra que la función siempre es creciente: