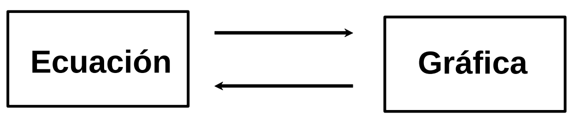
DISCUSIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

UNIDAD V

Existen dos problemas fundamentales en la Geometría Analítica:

1. Dada una ecuación hallar el lugar geométrico que representa.
2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

1er Problema



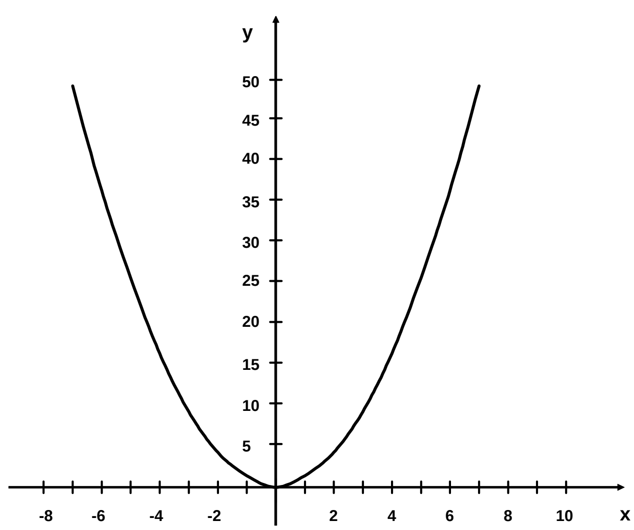
2° Problema

V. 1 CONCEPTO DE LUGAR GEOMÉTRICO

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen una determinada condición. La solución de un problema de lugares geométricos es una ecuación, la ecuación de todos los puntos que cumplen la dicha condición.

Por ejemplo, el lugar geométrico formado por la condición $y = x^2$ es:

x	y
-7	49
-6	36
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49



El lugar geométrico se forma a partir de *todos* los puntos que satisfacen la condición, es decir, su gráfica representa la unión de una *infinidad* de puntos. Sin embargo, en la práctica se toma como referencia las parejas ordenadas que se obtienen de la tabulación y se unen. Para el ejemplo anterior son: $(-5,25)$, $(-4,16)$, $(-3,9)$, $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$, $(4,16)$ y $(-5,25)$.

Puede apreciarse que el punto $A(-5,-15)$ no pertenece al lugar geométrico, ya que si se sustituyen los valores, no satisface la ecuación.

V. 2 DISCUSIÓN DE UNA CURVA

Para trazar una gráfica, el procedimiento consiste en localizar puntos derivados de una tabulación y dibujar una línea continua que pasa por todos ellos. Sin embargo, no todas las gráficas son continuas y por lo tanto, este procedimiento no es válido ya que se introducirían errores en el trazado de las gráficas.

Para evitar errores de este tipo se debe realizar una investigación preliminar de la ecuación antes de trazar la curva. A esto se le conoce como *discusión de una curva* a través del *método de los seis pasos*.

Las características por analizar son:

1) Intersecciones con los ejes
2) Simetría
3) Extensión o campo de variación
4) Asíntotas
5) Tabulación
6) Trazado de gráfica.

V.2.1 INTERSECCIONES CON LOS EJES

Son los puntos en que la gráfica del lugar geométrico corta a los ejes coordenados.

Para hallar la intersección con el eje x se hace $y=0$ en la ecuación dada y se despeja la variable x. Análogamente, para hallar la intersección con el eje y se hace $x=0$ y se despeja y.

V.2.2 SIMETRÍA

Existen tres casos posibles de simetría para un lugar geométrico:

a) Una curva es simétrica con respecto al eje x si para cada valor de x se obtienen dos valores iguales pero de signos contarios de y. Por lo tanto, si una ecuación no se altera al sustituir y por $-y$, su representación gráfica o lugar geométrico es simétrica respecto al eje x.

b) Una curva es simétrica con respecto al eje y si para cada valor de y se obtienen dos valores iguales pero de signos contarios de x. Por lo tanto, si una ecuación no se altera al sustituir x por $-x$, su representación gráfica o lugar geométrico es simétrica respecto al eje y.

c) Una curva es simétrica con respecto al origen si para cualquier punto que pertenezca al primer cuadrante equidista de otro punto que esté en el tercer cuadrante o, si para cualquier punto que se ubique en el segundo cuadrante, equidista de otro punto que se localice en el cuarto cuadrante. Por lo tanto, si una ecuación no se altera al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ simultáneamente, su representación gráfica o lugar geométrico es simétrica respecto al origen.

V.2.3 EXTENSIÓN

La extensión de una curva es la determinación de los intervalos de variación para los cuales los valores de las variables x y y son reales.

Los valores de cada una de las variables para las cuales la otra se hace imaginaria, carecen de sentido. Aquí se pueden presentar dos opciones:

a) Que se tenga un cociente. Aquí lo que debe evitarse es que el denominador se haga cero.
b) Que tenga un radical con índice par. Aquí lo que debe cuidarse es que su argumento sea positivo o cuando menos igual a cero.

Si no sucede ninguna de las dos opciones anteriores, entonces existe la gráfica en x para toda y y en y para toda x.

V.2.4 ASÍNTOTAS

Si para una curva dada existe una recta tal que a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente de su origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta se llama *asíntota* de la curva.

Las asíntotas pueden ser horizontales o verticales (aunque en términos genéricos pueden tener cualquier inclinación).

Un lugar geométrico tiene:

- Una asíntota vertical cuando crece indefinidamente si x tiende a un valor finito.
- Una asíntota horizontal cuando a medida que x crece indefinidamente, la función tiende a un número finito.

Un lugar geométrico puede tener más de una asíntota horizontal o vertical y sólo existen si hay expresiones racionales de las formas:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{o} \quad g(y)=\frac{p(y)}{q(y)}$$

En el caso de las funciones racionales, las asíntotas verticales se deducen de la expresión despejada para y y de los valores de x que no están en el dominio de la función, es decir, los que anulan el denominador.

Por ejemplo, la curva $y=\frac{1}{(x-3)(x+5)}$ tiene dos asíntotas verticales: una en $x=3$ y la otra en $x=-5$.

En el caso de las funciones racionales, las asíntotas horizontales se deducen de la expresión despejada para x y de los valores de y que anulan el denominador.

Por ejemplo, la curva $x=\frac{1}{y(y^2-4)(2y+12)}$ tiene cuatro asíntotas horizontales: en $y=0$, $y=2$, $y=-2$ y en $y=-6$. Este paso es una consecuencia directa de la extensión.

V.2.5 TABULACIÓN

Es el cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos (al menos diez) para obtener una gráfica adecuada.

Por lo general, se sustituye el valor de x en la ecuación despejada para y en el paso tres. Siempre deben darse los valores de x con base en la extensión obtenida y así obtener y, o viceversa.

V.2.6 TRAZADO DE LA CURVA

Una vez efectuada la tabulación, se procede a localizar los puntos encontrados en el quinto paso y unirlos mediante una línea continua. Debe tenerse cuidado en trazar por anticipado las asíntotas (si las hay).

Ejemplos.
Discutir las siguientes curvas, mediante el método de los seis pasos:

1) $xy - 3y - 5x = 0 \qquad (1)$

Solución.

- Intersecciones con los ejes

* Con respecto al eje x $(y = 0)$

$$x(0) - 3(0) - 5x = 0$$

$$-5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0}{-5} = 0$$

$\therefore$ la curva corta al eje x en 0

* Con respecto al eje y $(x = 0)$

$$(0)y - 3y - 5(0) = 0$$

$$-3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{0}{-3} = 0$$

$\therefore$ la curva corta al eje y en 0

- Simetría

* Con respecto al eje x (y por $-y$)

$$x(-y) - 3(-y) - 5x = 0$$

$$-xy + 3y - 5x = 0 \qquad (2)$$

Como $(1) \neq (2)$, la curva no es simétrica con respecto al eje x.

* Con respecto al eje y (x por $-x$)

$$-xy - 3y - 5(-x) = 0$$

$$-xy - 3y + 5x = 0 \qquad (3)$$

Como $(1) \neq (3)$ la curva no es simétrica con respecto al eje y.

* Con respecto al origen (x por $-x$) y (y por $-y$)

$$(-x)(-y) - 3(-y) - 5(-x) = 0$$

$$xy + 3y + 5x = 0 \qquad (4)$$

Como $(1) \neq (4)$ la curva tampoco es simétrica respecto al origen.

- Extensión

* Se despeja la ecuación (1) para x :

$$xy-5x-3y=0 \quad\Rightarrow\quad xy-5x=3y \quad\Rightarrow\quad x(y-5)=3y \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3y}{y-5}$$

$\therefore\ \exists\ x\ \ \forall\ y$ excepto en $y=5$

* Se despeja la ecuación (1) para y :

$$xy-5x-3y=0 \quad\Rightarrow\quad xy-3y=5x \quad\Rightarrow\quad y(x-3)=5x \quad\Rightarrow\quad y=\frac{5x}{x-3} \qquad (5)$$

$\therefore\ \exists\ y\ \ \forall\ x$ excepto en $x=3$

- Asíntotas

$y=5$

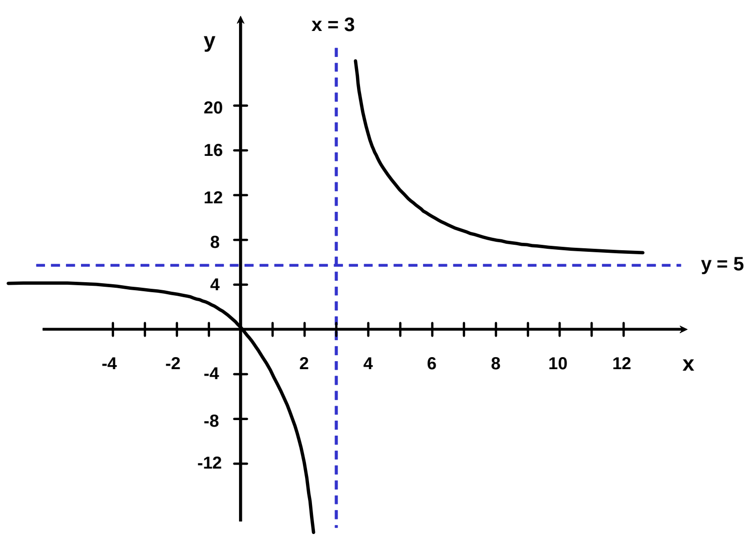
$x=3$

- Tabulación

Sustituyendo valores de x en (5) para obtener valores de y :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2.5	2	1.25	0	-2.5	-10	No definido	20	12.5	10	8.75	8	7.5	7.14

- Trazado de gráfica



2) $x^2y=16 \qquad (1)$

Solución.

- Intersecciones con los ejes

* Con respecto al eje x $(y=0)$

$x^2(0)=16$

$0=16 \quad\Rightarrow$ no hay intersección

* Con respecto al eje y $(x=0)$

$(0)^2 y = 16$

$0 = 16 \quad \Rightarrow$ no hay intersección

- Simetría

* Con respecto al eje x (y por $-y$)

$x^2(-y) = 16$

$-x^2 y = 16 \qquad (2)$

Como $(1) \neq (2)$, la curva no es simétrica con respecto al eje x.

* Con respecto al eje y (x por $-x$)

$(-x)^2 y = 16$

$x^2 y = 16 \qquad (3)$

Como $(1) = (3)$ la curva si es simétrica con respecto al eje y.

* Con respecto al origen (x por $-x$) y (y por $-y$)

$(-x)^2(-y) = 16 = 0$

$-x^2 y = 16 \qquad (4)$

Como $(1) \neq (4)$ la curva tampoco es simétrica respecto al origen.

- Extensión

* Se despeja la ecuación (1) para x :

$$x^2 y = 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{16}{y}$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{16}{y}}$$

* Se despeja la ecuación (1) para y :

$x^2 y = 16$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{16}{x^2} \qquad (5)$$

$\therefore \exists \ y \quad \forall \ x$ excepto en $x = 0$

- Asíntotas

$y = 0$

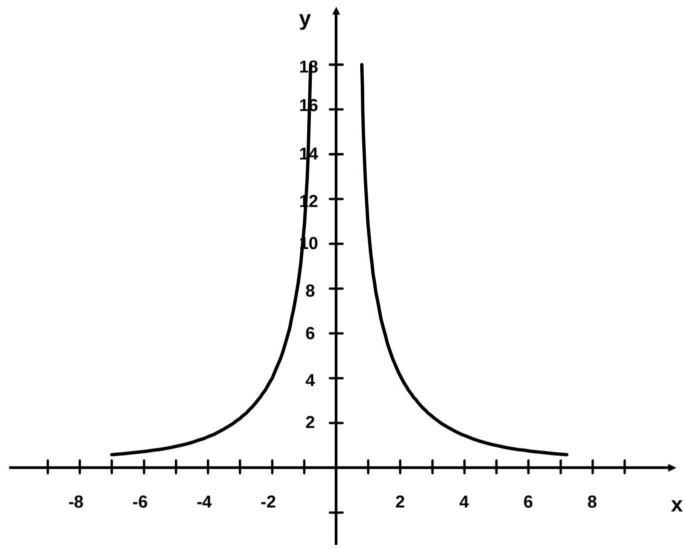
$x = 0$

- Tabulación

Sustituyendo valores de x en (5) para obtener valores de y :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1	1.77	4	16	No definido	16	4	1.77	1

- Trazado de gráfica



3) $x^2 + y^2 = 25 \qquad (1)$

Solución.

- Intersecciones con los ejes

* Con respecto al eje x $(y = 0)$

$x^2 + (0)^2 = 25$

$x^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \quad \therefore$ la curva corta al eje x en 5 y en -5

* Con respecto al eje y $(x = 0)$

$(0)^2 + y^2 = 25$

$y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \quad \therefore$ la curva corta al eje x en 5 y en -5

- Simetría

* Con respecto al eje x (y por $-y$)

$x^2 + (-y)^2 = 25$

$x^2 + y^2 = 25 \qquad (2)$

Como $(1) = (2)$, la curva si es simétrica con respecto al eje x.

* Con respecto al eje y (x por $-x$)

$(-x)^2 + y^2 = 25$

$x^2 + y^2 = 25 \qquad (3)$

Como $(1) = (3)$, la curva si es simétrica con respecto al eje y.

* Con respecto al origen (x por $-x$) y (y por $-y$)

$(-x)^2 + (-y)^2 = 25$

$x^2 + y^2 = 25 \qquad (4)$

Como $(1) = (4)$ la curva también es simétrica respecto al origen.

- Extensión

* Se despeja la ecuación (1) para x :

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 25 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{25 - y^2}$$

$25 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 25 \geq y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 \leq 25 \quad \therefore \exists\ x \quad \forall\ y$ con $-5 \leq y \leq 5$

* Se despeja la ecuación (1) para y :

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{25 - x^2} \qquad (5)$$

$25 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 25 \geq x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 \leq 25 \quad \therefore \exists\ y \quad \forall\ x$ con $-5 \leq x \leq 5$

- Asíntotas

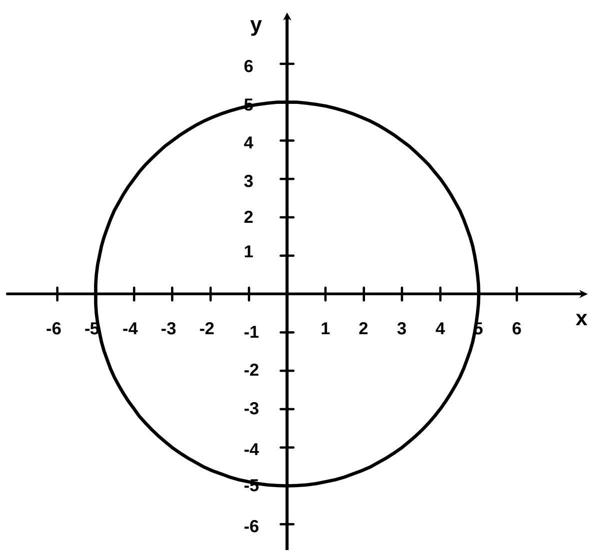
No hay

- Tabulación

Sustituyendo valores de x en (5) para obtener *dos* valores de y :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	±3	±4	±4.58	±4.89	±5	±4.89	±4.58	±4	±3	0

- Trazado de gráfica



4) $y^2 + 8x - 8y - 24 = 0 \qquad (1)$

Solución.

- Intersecciones con los ejes

* Con respecto al eje x $(y = 0)$

$$(0)^2 + 8x - 8(0) - 24 = 0$$

$8x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x = 24 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{24}{8} = 3 \quad \therefore$ la curva corta al eje x en 3

* Con respecto al eje y $(x = 0)$

$$y^2 + 8(0) - 8y - 24 = 0$$

$y^2 - 8y - 24 = 0$

aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado: $(a = 1,\ b = -8,\ c = -24)$:

$$y = \frac{--8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-24)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 96}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{160}}{2} = \frac{8 \pm 12.64}{2} \quad \Rightarrow$$

$$y_1 \approx \frac{20.64}{2} \approx 10.32; \quad y_2 \approx \frac{-4.64}{2} \approx -2.32$$

$\therefore$ la curva corta al eje y aproximadamente en 10.32 y -2.32

- Simetría

* Con respecto al eje x (y por $-y$)

$(-y)^2 + 8x - 8(-y) - 24 = 0$

$y^2 + 8x + 8y - 24 = 0 \qquad (2)$

Como $(1) \neq (2)$, la curva no es simétrica con respecto al eje x .

* Con respecto al eje y (x por $-x$)

$y^2 + 8(-x) - 8y - 24 = 0$

$y^2 - 8x - 8y - 24 = 0 \qquad (3)$

Como $(1) \neq (3)$, la curva si es simétrica con respecto al eje y .

* Con respecto al origen (x por $-x$) y (y por $-y$)

$(-y)^2 + 8(-x) - 8(-y) - 24 = 0$

$y^2 - 8x + 8y - 24 = 0 \qquad (4)$

Como $(1) \neq (4)$ la curva tampoco es simétrica respecto al origen.

- Extensión

* Se despeja la ecuación (1) para x :

$$y^2 + 8x - 8y - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x = -y^2 + 8y + 24 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-y^2 + 8y + 24}{8}$$

el denominador nunca se puede hacer cero $\therefore \exists\ x \ \ \forall\ y$

* Se despeja la ecuación (1) para y :

$y^2 + 8x - 8y - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 8y - 24 + 8x = 0$

aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado: $(a = 1,\ b = -8,\ c = -24 + 8x)$:

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-24 + 8x)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 96 - 32x}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{160 - 32x}}{2} \qquad (5)$$

analizando el radical se tiene:

$$160 - 32x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 160 \geq 32x \quad \Rightarrow \quad 32x \leq 160 \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{160}{32} \quad \Rightarrow \quad x \leq 5$$

$\therefore \exists\ y \ \ \forall\ x$ con $x \leq 5$

- Asíntotas

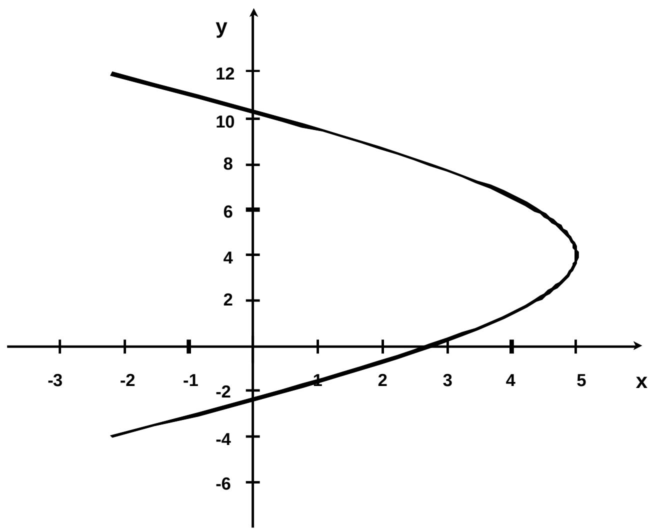
No hay

- Tabulación

Sustituyendo valores de x en (5) para obtener *dos* valores de y :

x	-1		0		1		2		3		4		5
y	10.92	-2.92	10.32	-2.32	9.65	-1.65	8.89	-0.89	8	0	6.82	1.17	4

- Trazado de gráfica



5) $x^2 y - 4y - 10 = 0 \qquad (1)$

Solución.

- Intersecciones con los ejes

* Con respecto al eje x $(y = 0)$

$x^2(0) - 4(0) - 10 = 0$

$-10 = 0 \quad \Rightarrow$ no hay intersección

* Con respecto al eje y $(x = 0)$

$(0)^2 y - 4y - 10 = 0$

$-4y - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad -4y = -10 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10}{-4} = -2.5 \quad \therefore$ la curva corta al eje x en -2.5

- Simetría

* Con respecto al eje x (y por $-y$)

$x^2(-y) - 4(-y) - 10 = 0$

$-x^2 y + 4y - 10 = 0 \qquad (2)$

Como $(1) \neq (2)$, la curva no es simétrica con respecto al eje x .

* Con respecto al eje y (x por $-x$)

$(-x)^2 y - 4y - 10 = 0$

$x^2 y - 4y - 10 = 0 \qquad (3)$

Como $(1)=(3)$, la curva si es simétrica con respecto al eje y.

* Con respecto al origen (x por $-x$) y (y por $-y$)

$$(-x)^2(-y)-4(-y)-10=0$$

$$-x^2y+4y-10=0 \qquad (4)$$

Como $(1)\neq(4)$ la curva tampoco es simétrica respecto al origen.

- Extensión

* Se despeja la ecuación (1) para x:

$$x^2y-4y-10=0 \quad \Rightarrow \quad x^2y=4y+10 \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{4y+10}{y} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\frac{4y+10}{y}}$$

para que exista en los números reales, se debe cumplir la desigualdad $\frac{4y+10}{y}>0$

donde se tiene un polinomio racional de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$ cuyas raíces son: $y=-2.5$ y $y=0$

así que se generan tres intervalos de factible solución: $(-\infty,-2.5),(-2.5,0),(0,\infty)$

Probando con valores intermedios a fin de saber cuáles cumplen con la desigualdad:

$-3\in(-\infty,-2.5)$

$$\frac{4(-3)+10}{-3}=\frac{-12+10}{-3}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

como $\frac{2}{3}$ es mayor que 0 se satisface la desigualdad para cualquier punto de ese intervalo.

$-1\in(-2.5,0)$

$$\frac{4(-1)+10}{-1}=\frac{-4+10}{-1}=\frac{6}{-1}=-6$$

como 6 no es mayor que 0, no se satisface la desigualdad para ningún punto de ese intervalo.

$1\in(0,\infty)$

$$\frac{4(1)+10}{-3}=\frac{4+10}{1}=\frac{14}{1}=14$$

como 14 es mayor que 0 se satisface la desigualdad para cualquier punto de ese intervalo.

entonces, el conjunto solución es la unión de los intervalos que cumplen la desigualdad: $(-\infty,-2.5)\cup(0,\infty)$

$\therefore\ \exists\ x\ \ \forall\ y$ con $(-\infty,-2.5)\cup(0,\infty)$

* Se despeja la ecuación (1) para y:

$$x^2y-4y-10=0 \quad \Rightarrow \quad x^2y-4y=10 \quad \Rightarrow \quad y\left(x^2-4\right)=10 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{10}{x^2-4} \qquad (5)$$

$\therefore\ \exists\ y\ \ \forall\ x$ excepto en $x=2$ y $x=-2$

- Asíntotas

$x=2$

$x=-2$

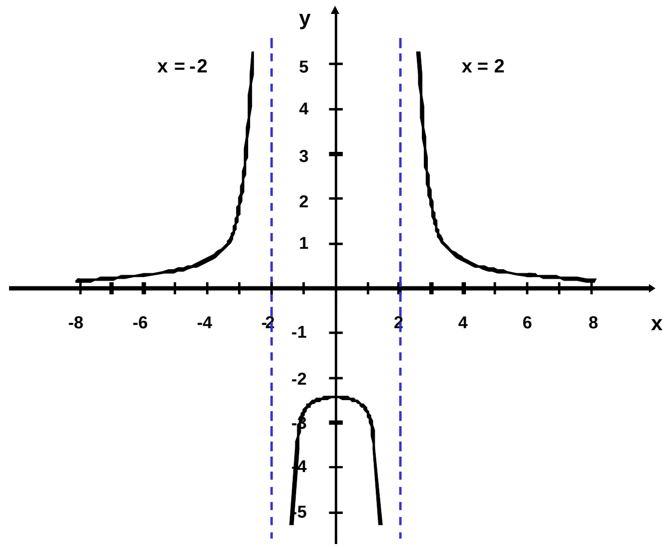
$y=0$

- Tabulación

Sustituyendo valores de x en (5) para obtener valores de y:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1.5	-1	0	1	1.5	2	3	4	5	6
y	0.31	0.47	0.83	2	∄	-5.71	-3.33	-2.5	-3.33	-5.71	∄	2	0.83	0.47	0.31

- Trazado de gráfica



6) $x^2 - 4y^2 = 16 \qquad (1)$

Solución.

- Intersecciones con los ejes

* Con respecto al eje x $(y = 0)$

$$x^2 - 4(0)^2 = 16$$

$x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \quad \therefore$ la curva corta al eje x en 4 y en -4

* Con respecto al eje y $(x = 0)$

$$(0)^2 - 4y^2 = 16$$

$-4y^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad -4y^2 = -16 \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{16}{4} = -4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{-4} \quad \therefore$ la curva no cruza al eje y

- Simetría

* Con respecto al eje x (y por $-y$)

$$x^2 - 4(-y)^2 = 16$$

$$x^2 - 4y^2 = 16 \qquad (2)$$

Como $(1) = (2)$, la curva si es simétrica con respecto al eje x .

* Con respecto al eje y (x por $-x$)

$$(-x)^2 - 4y^2 = 16$$

$$x^2 - 4y^2 = 16 \qquad (3)$$

Como $(1) = (3)$, la curva si es simétrica con respecto al eje y .

* Con respecto al origen (x por $-x$) y (y por $-y$)

$(-x)^2-4(-y)^2=16$

$x^2-4y^2=16 \qquad (4)$

Como $(1)=(4)$ la curva también es simétrica respecto al origen.

- Extensión

* Se despeja la ecuación (1) para x:

$x^2-4y^2=16 \quad \Rightarrow \quad x^2=16+4y^2 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{16+y^2}$

$16+y^2\geq 0 \quad \Rightarrow \quad y^2\geq -16 \quad \Rightarrow$ es una desigualdad absoluta (siempre se cumple) $\therefore \exists\ x \quad \forall\ y$

* Se despeja la ecuación (1) para y:

$x^2-4y^2=16 \quad \Rightarrow \quad -4y^2=16-x^2 \quad \Rightarrow \quad 4y^2=x^2-16 \quad \Rightarrow \quad y^2=\dfrac{x^2-16}{4}$

$\Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{\dfrac{x^2-16}{4}} \qquad (5)$

$\dfrac{x^2-16}{4}\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-16\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\geq 16 \quad \therefore \exists\ y \quad \forall\ x$ con $-4\geq x\geq 4$

- Asíntotas

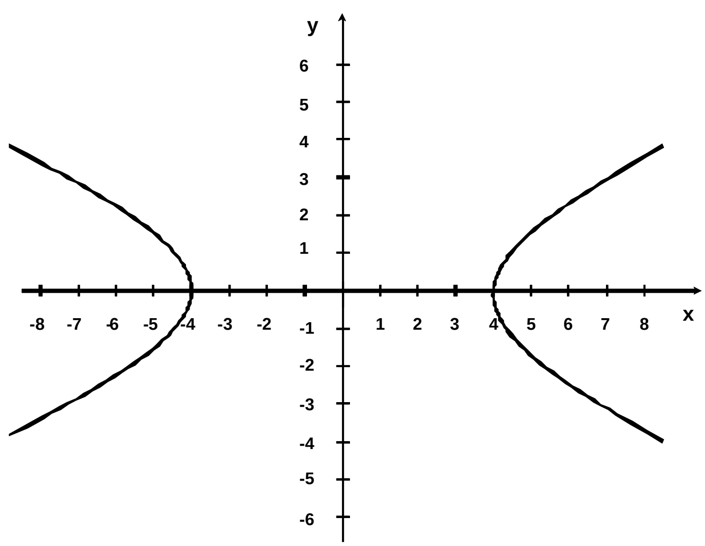
No tiene asíntotas horizontales ni verticales

- Tabulación

Sustituyendo valores de x en (5) para obtener *dos* valores de y:

x	x	-8	-7	-6	-5	-4	4	5	6	7	8
y	y	±3.46	±2.87	±2.23	±1.5	0	0	±1.5	±2.23	±2.87	±3.46

- Trazado de gráfica



V.3 ECUACIONES DE LUGARES GEOMÉTRICOS

El segundo problema fundamental de la geometría analítica consiste en obtener la ecuación de un lugar geométrico dada su gráfica o sus condiciones básicas. En general, para obtener la ecuación de un lugar geométrico se sigue el procedimiento que a continuación se describe:

Una vez conocidas las condiciones que debe cumplir un lugar geométrico, se expresan algebraicamente en términos de un punto $P(x,y)$ que es un punto del lugar geométrico, y por lo tanto, satisface las condiciones dadas. Se obtiene la expresión (generalmente aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos), se simplifica, se iguala a cero y se comprueba que cualquier punto que pertenezca a la curva satisface la ecuación encontrada. Cualquier pareja de valores que satisfaga la ecuación representa las coordenadas de un punto del lugar geométrico.

Ejemplos.

1) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano que equidisten de los puntos $P_1(3,-5)$ y $P_2(-6,2)$

Solución.

La distancia al punto P_1 es: $d_1=\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}$ y la distancia al punto P_2 es: $d_2=\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}$

Al equidistar, implica que: $d_1=d_2$

$\therefore\quad \sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}=\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}$

elevando al cuadrado:

$(x-3)^2+(y+5)^2=(x+6)^2+(y-2)^2$

desarrollando:

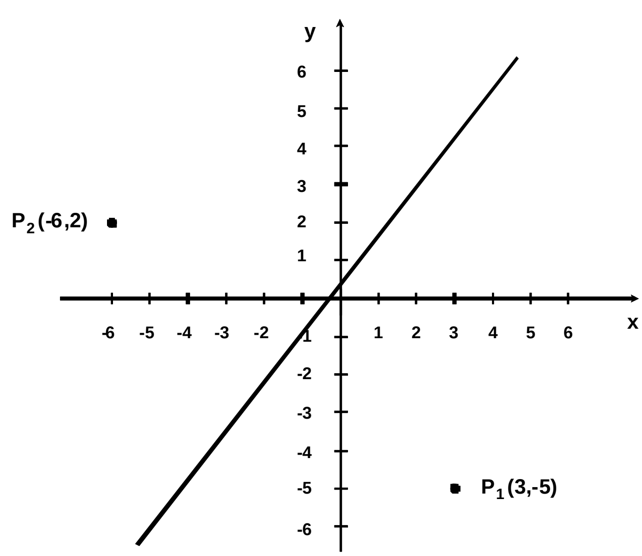
$x^2-6x+9+y^2+10y+25=x^2+12x+36+y^2-4y+4$

reduciendo términos semejantes:

$18x-14y+6=0$

simplificando se obtiene:

$9x-7y+3=0$



2) Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $P_1(-3,1)$ y $P_2(5,1)$ sea igual a 82

Solución.

$$d_1=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}\ ;\quad d_2=\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}\ ;\quad (d_1)^2+(d_2)^2=82$$

$$\therefore\quad \left(\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}\right)^2=82$$

eliminando las raíces:

$$(x+3)^2+(y-1)^2+(x-5)^2+(y-1)^2=82$$

desarrollando:

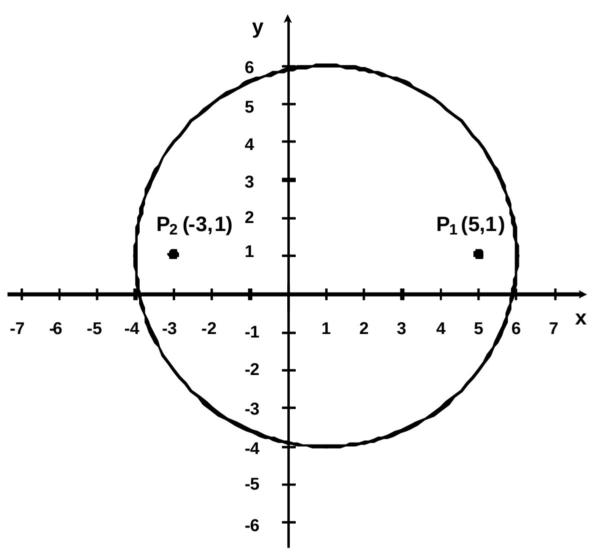
$$x^2+6x+9+y^2-2y+1+x^2-10x+25+y^2-2y+1=82$$

reduciendo términos semejantes:

$$2x^2+2y^2-4x+4y-46=0$$

simplificando se obtiene:

$$x^2+y^2-2x+2y-23=0$$



3) Obtener la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano que equidisten del punto $P_1(2,1)$ y de la recta $x=-4$

Solución.

$$d_1=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\ ;\quad d_2\quad\Rightarrow\quad x+4=0\ ;\qquad d_1=d_2$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=x+4$$

elevando al cuadrado:

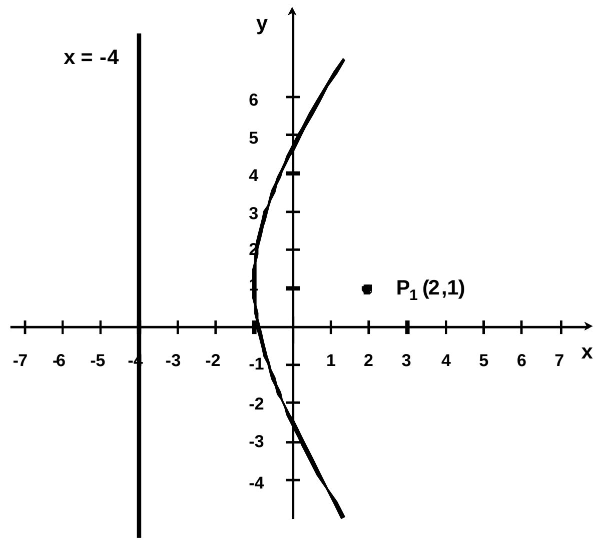
$$(x-2)^2+(y-1)^2=(x+4)^2$$

desarrollando:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 8x + 16$$

reduciendo términos semejantes se obtiene:

$$y^2 - 12x - 2y - 11 = 0$$



4) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano cuya distancia del eje x siempre igual que al punto $P_1(3,2)$

Solución.

La distancia que existe de cualquier punto $P(x,y)$ del lugar geométrico al eje x es y, por lo tanto se cumple que:

$$d_1 = y$$

Por su parte la distancia al punto P_1 es:

$$d_2 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

$$d_1 = d_2$$

$$y = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

elevando al cuadrado:

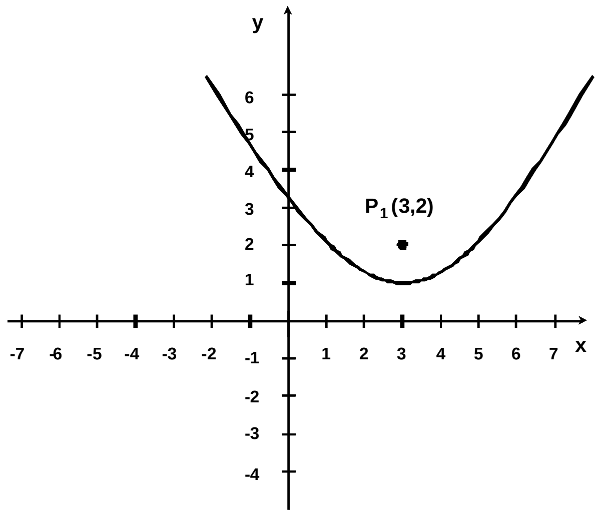
$$y^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

desarrollando:

$$y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$$

reduciendo términos semejantes se obtiene:

$$x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$$



5) Encontrar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x,y)$ que se mueve en el plano de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(0,3)$ y $B(0,-3)$ sea 10

Solución.

$$d_1=\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}\ ;\quad d_2=\sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2}\ ;\quad d_1+d_2=10$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2}=10$$

que equivale a:

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10-\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

elevando ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{x^2+(y-3)^2}\right)^2=\left(10-\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2$$

desarrollando:

$$x^2+(y-3)^2=100-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}+x^2+(y+3)^2$$

$$x^2+y^2-6y+9=100-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}+x^2+y^2+6y+9$$

reduciendo términos semejantes:

$$-12y=100-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

que equivale a:

$$20\sqrt{x^2+(y+3)^2}=100+12y$$

dividiendo entre 4 y elevando nuevamente al cuadrado ambos miembros:

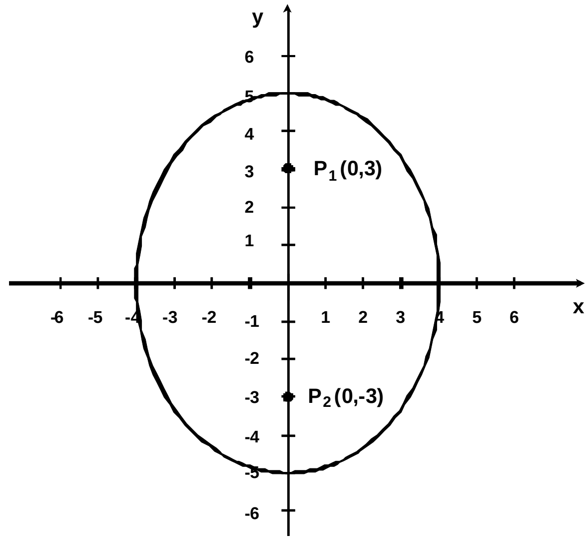
$$\left(5\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2=(25+3y)^2$$

$$25\left(x^2+(y+3)^2\right)=(25+3y)^2\Rightarrow 25\left(x^2+y^2+6y+9\right)=625+150y+9y^2$$

$$25x^2+25y^2+150y+225=625+150y+9y^2$$

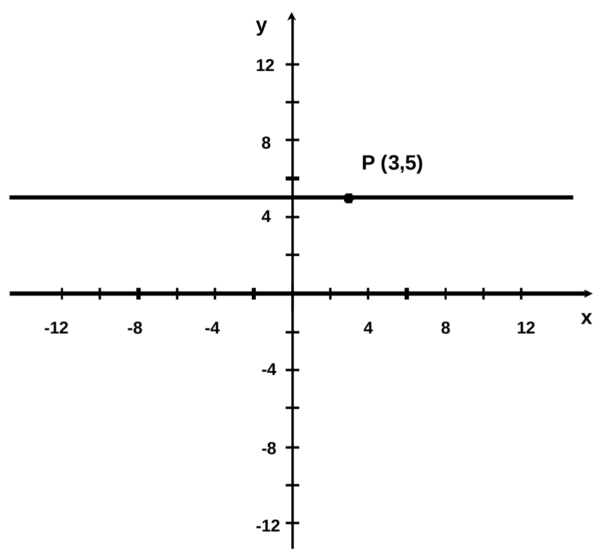
reduciendo términos semejantes se obtiene:

$25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$



6) Obtener la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que es paralelo al eje x y que pasa por el punto $(3,5)$

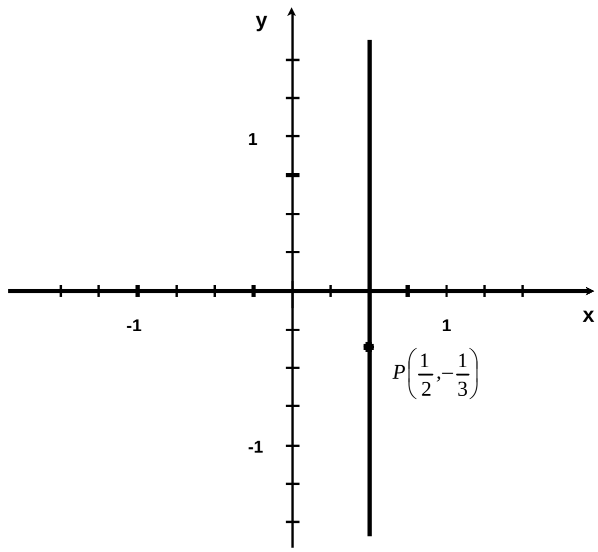
Solución.
Trazando una gráfica:



se aprecia que es una recta horizontal que cruza al eje y en 5, por lo tanto: $y = 5 \quad \Rightarrow \quad y - 5 = 0$.

7) Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que es paralelo al eje y y que pasa por el punto $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$

Solución.
Trazando una gráfica:

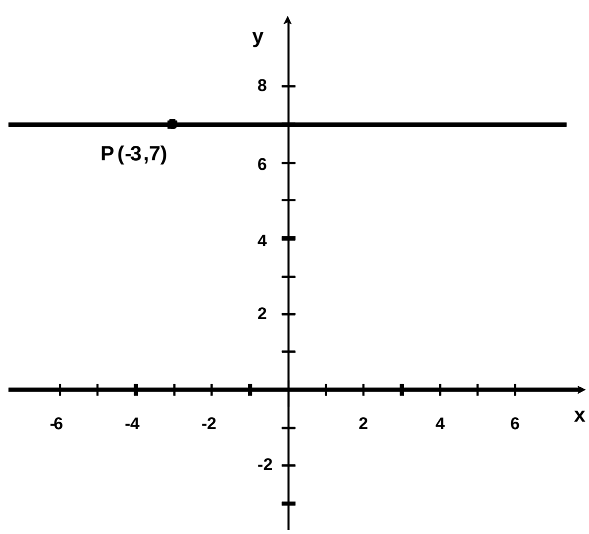


se aprecia que es una recta vertical que cruza al eje x en $x=\frac{1}{2}$, por lo tanto:

$$x=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x=1 \quad \Rightarrow \quad 2x-1=0$$

8) Encontrar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x,y)$ que es perpendicular al eje y y que pasa por el punto $(-3,7)$

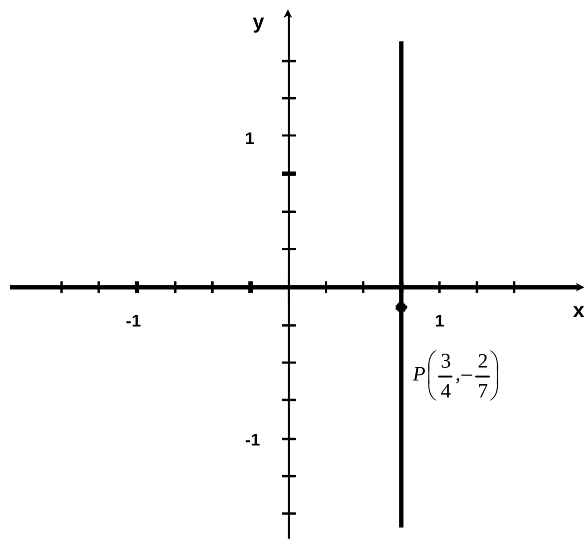
Solución.
Trazando una gráfica:



se advierte que es una recta horizontal que cruza al eje y en 7, por lo tanto: $y=7 \quad \Rightarrow \quad y-7=0$

9) Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x,y)$ que es perpendicular al eje x y que pasa por el punto $P\left(\frac{3}{4},-\frac{2}{7}\right)$.

Solución:
Trazando una gráfica:



se aprecia que es una recta horizontal que cruza al eje y en $x=\frac{3}{4}$

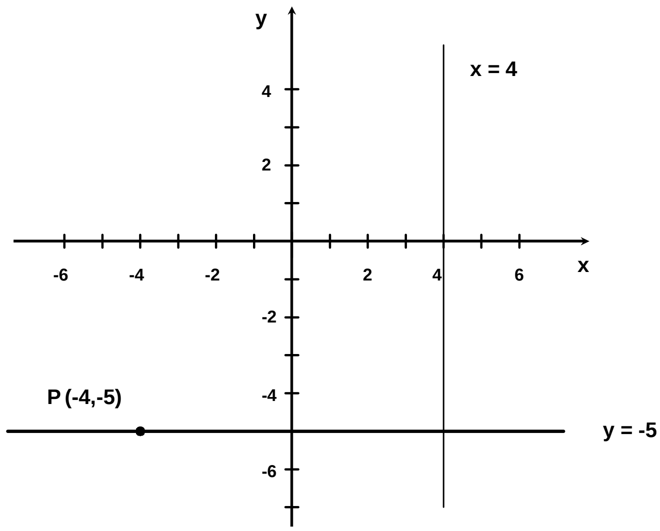
por lo tanto:

$$x=\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 4x=3 \quad \Rightarrow \quad 4x-3=0$$

10) Determinar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x,y)$ que es perpendicular al eje y, que pasa por el punto $P(-4,-5)$ y que sea perpendicular a la recta $x-4=0$

Solución:
La recta puede expresarse como $x=4$.
Trazando una gráfica, se encuentra que la recta que cumple con la condición es:

$$y=-5 \quad \Rightarrow \quad y+5=0$$



V.4 APLICACIONES

Para comprender el mundo, la mente humana depende en gran medida de su percepción de las figuras y modelos. Muchas de las creaciones humanas, así como las figuras de la naturaleza, con frecuencia se pueden caracterizar en términos de su forma geométrica.

Algunas de las ideas y términos de la Geometría se han convertido en parte del lenguaje cotidiano. Aunque los objetos reales jamás concuerdan exactamente con una figura geométrica, sí se aproximan, de modo que lo que se sabe sobre las figuras y relaciones geométricas se puede aplicar a los objetos.

Los lugares geométricos se pueden representar a través de expresiones algebraicas que describen su comportamiento. La interpretación matemática de las figuras también incluye la descripción gráfica de las relaciones numéricas y simbólicas.

Las cantidades se visualizan como longitudes o áreas (como en las gráficas de barras y de sectores circulares) o como distancias desde ejes de referencia (como en las gráficas lineales o planos esparcidos). La exposición gráfica hace posible identificar patrones de inmediato, que de otra forma no serian obvios. Por ejemplo: tamaños relativos (proporciones o diferencias), índices de cambio (rapidez con que se modifica una variable), discontinuidades abruptas (aumentos a intervalos), agrupación (distancias entre puntos marcados) y tendencias (proyecciones).

La matemática de las relaciones geométricas también ayuda en el análisis del diseño de estructuras complejas (moléculas proteínicas o alas de aviones) y redes lógicas (conexiones de células cerebrales o sistemas telefónicos de larga distancia).