FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

UNIDAD III

III.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

Una *función exponencial* con base a se define como:

$$y = f(x) = a^x$$

donde $a \in \mathbf{R}$ con $a > 0$, $a \neq 1$ y x es un número real.

Esto significa que la base de la función exponencial siempre es positiva, por lo que el valor de $f(x)$ siempre es positivo. Además, la base no puede ser la unidad, porque se convertiría en la función constante $f(x) = 1^x = 1$.

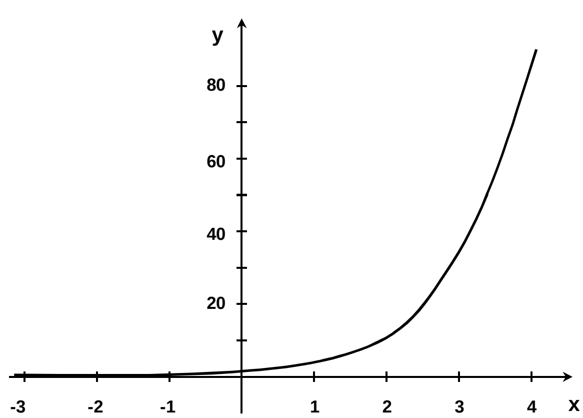
Es importante que esta función no se confunda con la función $f(x) = x^a$, cuya base es x que asocia a cada número real a un número positivo x^a. El comportamiento de estas funciones es muy distinto. Para ejemplificar esto, se toma el valor de $a = 3$ y tabulando ambas funciones, se tiene:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x) = x^3$	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	125	216
$f(x) = 3^x$	0.037	0.111	0.333	1	3	9	27	81	243	729

Como puede apreciarse, la diferencia de valores es considerable, ya que en la primera función sólo se calcula el cubo del número y en la segunda se comporta de forma exponencial.

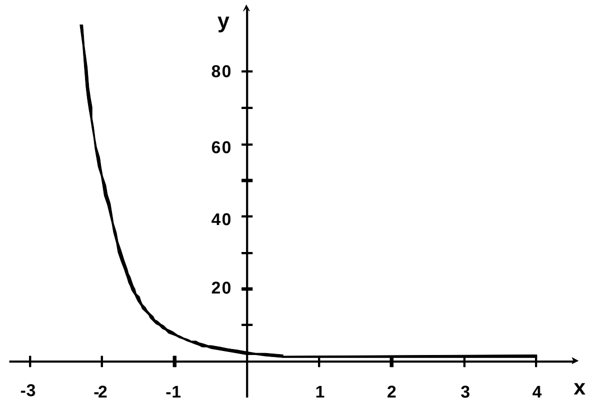
III.2 DOMINIO, RANGO Y GRÁFICA DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Al graficar la función $y = 3^x$ tomando en consideración la tabulación anterior, se obtiene:



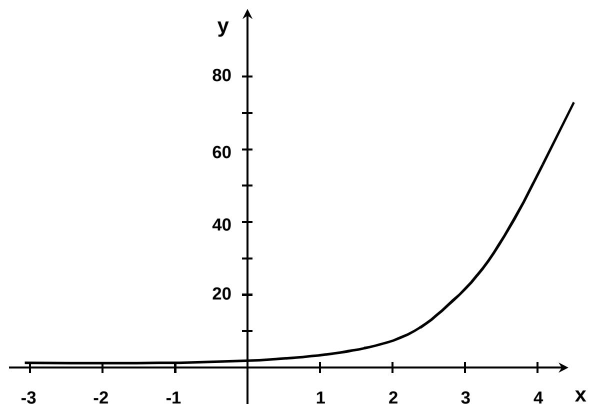
Ahora, si se grafica la función $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$, se tiene:

x	$y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$
-3	343
-2	49
-1	7
0	1
1	0.1428
2	0.0204
3	0.0029



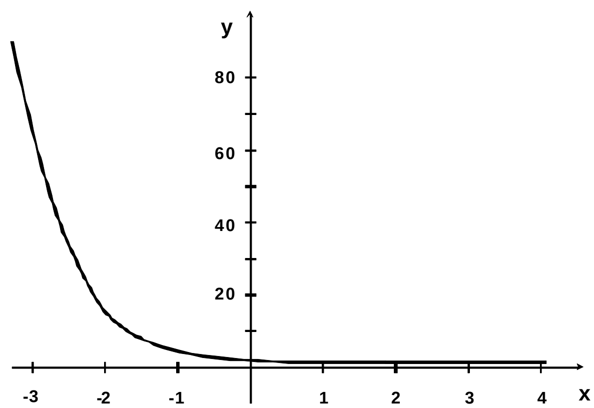
Graficando la función $y=2.7^x$, se obtiene:

x	$y=2.7^x$
-4	0.0188
-3	0.0508
-2	0.1371
-1	0.3703
0	1
1	2.7
2	7.29
3	19.683
4	53.1441



Finalmente, si se grafica la función $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, se tiene:

x	$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$
-3	64
-2	16
-1	4
0	1
1	0.25
2	0.0625
3	0.015625



De acuerdo a lo anterior, se puede concluir que :

- El dominio de la función exponencial es el intervalo abierto: $(-\infty,\infty)$
- El rango de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales positivos: $(0,\infty)$
- No cruza al eje x, siempre corta al eje y en el punto $P(0,1)$ y pasa por el punto $P(1,a)$
- Siempre es creciente si $a>1$ y siempre es decreciente si $0<a<1$
- La función crece más rápido si la base es cada vez mayor y decrece más rápido si la base es cada vez menor
- Es continua
- Si el valor de la base es uno, a se convierte en la función constante $f(x)=1$, representada por una recta paralela al eje x, a una unidad de distancia.

Es importante mencionar que se pueden modificar los parámetros de la función exponencial de manera similar a los que las funciones trigonométricas. Esto es, se pueden presentar variaciones de la forma: $f(x)=k\cdot a^{x}$, $f(x)=a^{k\cdot x}$, $f(x)=a^{k+x}$, $f(x)=a^{x}+k$, etc.

III.3 ECUACIONES EXPONENCIALES

A las ecuaciones que contienen términos de la forma a^{x}, $a>1$, $a\neq 1$ se les llama ecuaciones exponenciales. Tales ecuaciones pueden resolverse aplicando de forma apropiada las leyes de exponentes[1] de forma tal que pueda llegarse a una expresión con la misma base y reducir, teniendo en cuenta que: $a^{u}=a^{v} \quad \Leftrightarrow \quad u=v$

Ejemplos.
Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1) $3^{x+1}=27$
Solución.

Por ser 3 y 27 múltiplos de 3, la igualdad anterior se puede escribir como: $3^{x+1}=3^{3}$, pero se sabe que las cantidades iguales con bases iguales tienen exponentes iguales, así que: $x+1=3$. Resolviendo la ecuación se tiene: $x=3-1 \quad \Rightarrow \quad x=2$

2) $8^{x-2}=32^{x+2}$
Solución.

Por ser 8 y 32 múltiplos de 2, la igualdad anterior se puede escribir como: $\left(2^{3}\right)^{x-2}=\left(2^{5}\right)^{x+2}$ de donde: $2^{3x-6}=2^{5x+10}$, pero se sabe que las cantidades iguales con bases iguales tienen exponentes iguales, por tanto: $3x-6=5x+10$, resolviendo, se tiene: $-2x=16 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{16}{-2}=-8$

3) $2^{x^{2}+2x}=\frac{1}{2}$
Solución.

---

[1] Las leyes de exponentes más aplicadas en este tipo de ecuaciones son: $x^{m}\cdot x^{n}=x^{m+n}$, $\frac{x^{m}}{x^{n}}=x^{m-n}$ y $\left(x^{m}\right)^{n}=x^{m\cdot n}$.

Como $\frac{1}{2}=2^{-1}$, la ecuación se puede escribir como: $2^{x^2+2x}=2^{-1}$. Pero se sabe que las cantidades iguales con bases iguales tienen exponentes iguales, se tiene: $x^2+2x=-1 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x+1=0$, resolviendo la ecuación de segundo grado por factorización:

$(x+1)(x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1 \qquad x_2=-1$.

4) $5^{2x+1}-3\cdot 25^{2x-1}=550$

Solución.

Aplicando leyes de exponentes se tiene:

$$5^{2x}\cdot 5-3\cdot 5^{2x}\cdot 5^{-1}=550 \quad \Rightarrow \quad 5^{2x}\cdot 5-\frac{3}{5}\cdot 5^{2x}=550$$

Multiplicando por 5:

$$25\cdot 5^{2x}-3\cdot 5^{2x}=2750$$

factorizando 5^{2x}:

$$5^{2x}\cdot(25-3)=2750 \quad \Rightarrow \quad 5^{2x}\cdot 22=2750$$

$$5^{2x}=\frac{2750}{22} \quad \Rightarrow \quad 5^{2x}=125 \quad \Rightarrow \quad 5^{2x}=5^3$$

$$\therefore \quad 2x=3 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

5) $3^{x+2}+3^{x+1}+3^x=\frac{13}{9}$

Solución.

Aplicando leyes de exponentes se tiene:

$$3^x\cdot 3^2+3^x\cdot 3+3^x=\frac{13}{9} \quad \Rightarrow \quad 3^x\cdot 9+3^x\cdot 3+3^x=\frac{13}{9}$$

factorizando 3^x se tiene:

$$3^x(9+3+1)=\frac{13}{9}$$

$$\Rightarrow \quad 3^x(13)=\frac{13}{9} \quad \Rightarrow \quad 3^x=\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad 3^x=\frac{1}{3^2} \quad \Rightarrow \quad 3^x=3^{-2} \quad \Rightarrow \quad x=-2$$

6) $\frac{2^x+2^{-x}}{2}=\frac{5}{4}$

Solución.

Multiplicando la ecuación por dos:

$$2\cdot\frac{2^x+2^{-x}}{2}=2\cdot\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad 2^x+2^{-x}=\frac{10}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$$

Multiplicando ambos miembros por 2^x:

$$2^x\left(2^x+2^{-x}\right)=2^x\cdot\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad 2^{2x}+1=\frac{5}{2}2^x \quad \Rightarrow \quad 2^{2x}-\frac{5}{2}^{2x}+1=0$$

haciendo el cambio de variable: $u=2^x$, se llega a:

$u^2 - \frac{5}{2}u + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2u^2 - 5u - 2 = 0$

aplicando fórmula general:

$a = 2,\ b = -5,\ c = -2$:

$$u = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$

$\Rightarrow \quad u_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

sustituyendo en $u = 2^x$:

$2^x = 2 = 2^1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$

$2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1$

III.4 INTERÉS COMPUESTO

Si se deposita una cantidad de dinero M en una cuenta que paga una tasa de interés anual i, se puede obtener el capital C que se tendrá en esa cuenta al final de t años. El capital será el monto original más el rendimiento que generó en ese tiempo, es decir $M + M \cdot i \cdot t$, o bien:

$$C = M(1 + i \cdot t)$$

Si se deposita esa misma cantidad, pero los intereses se pagan cada seis meses (llamado periodo de capitalización), entonces el capital al final del primer semestre será: $C = M\left(1 + \frac{i}{2}\right)$, la cuenta comenzará el segundo periodo con ese valor, pero terminará con un saldo de: $C = M\left(1 + \frac{i}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right) = M\left(1 + \frac{i}{2}\right)^2$.

Si se prosigue sucesivamente con el proceso, al final de diez años, se tendría un capital de: $C = M\left(1 + \frac{i}{2}\right)^{20}$

El interés ganado se vuelve a depositar (se capitaliza) en la cuenta que también gana interés. Cuando sucede esto, se dice que la cuenta paga *interés compuesto*.

En términos generales, si se quiere invertir un monto M en una cuenta que paga un interés k veces al año, a una tasa anual i, el capital C que se tendrá a un periodo de tiempo t viene dado por la expresión:

$$C = M\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kt}$$

Ejemplo.

Un profesionista invierte $50{,}000$ pesos en un banco que paga el 8% de interés anual. Si se reinvierten los dividendos cuatrimestralmente, ¿cuánto capital tendrá en 12 años?

Solución.
Se sustituyen los datos en la expresión anterior, considerando que un año tiene tres cuatrimestres:

$$C = 50{,}000\left(1+\frac{0.08}{3}\right)^{3(12)} = 50{,}000(1+0.02666)^{36} = 50{,}000(2.57905) = 128{,}952.75$$ pesos.

Ejemplo.
Una persona debe $6{,}000$ pesos en su tarjeta de crédito que cobra una tasa de interés anual de 36%. Si no realiza ningún pago y el banco capitaliza los intereses trimestralmente, cuánto deberá en 2 años?
Solución.
Un año tiene cuatro trimestres, por lo que sustituyendo en la fórmula se tiene:

$$C = 6{,}000\left(1+\frac{0.36}{4}\right)^{4(2)} = 6{,}000(1+0.09)^{8} = 6{,}000(1.9925) = 11{,}955.37$$ pesos.

III.5 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Sea la siguiente expresión: $a^n = b$

Se define al logaritmo en base a de un número b como el exponente n al que hay que elevar la base para obtener dicho número, esto es:

$$\log_a b = n$$

que se lee: *el logaritmo en base* a *del número* b *es* n.

Ejemplos:

$$3^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \log_3 9 = 2$$
$$2^7 = 128 \quad \Rightarrow \quad \log_2 128 = 7$$
$$5^4 = 625 \quad \Rightarrow \quad \log_5 625 = 4$$

Como se puede ver, un logaritmo no es otra cosa que un exponente, hecho que no se debe olvidar cuando se trabaje con logaritmos.

Los logaritmos fueron introducidos en las Matemáticas con el propósito de facilitar, simplificar o incluso, hacer posible complicados cálculos numéricos. Utilizando logaritmos se puede convertir productos en sumas, cocientes en restas, potencias en productos y raíces en cocientes.

La constante a es un número real positivo distinto de uno, y se denomina base del sistema de logaritmos. La potencia a^n para cualquier valor real de n solo tiene sentido si $a > 0$.

Logaritmos decimales

Se llaman logaritmos decimales a los logaritmos que tienen por base el número 10. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base: $\log_{10} x = \log x$

Como:

$10^0 = 1 \;\Rightarrow\; \log_{10} 1 = 0$

$10^1 = 10 \;\Rightarrow\; \log_{10} 10 = 1$

$10^2 = 100 \;\Rightarrow\; \log_{10} 100 = 2$

$10^3 = 1{,}000 \;\Rightarrow\; \log_{10} 1{,}000 = 3$

$10^4 = 10{,}000 \;\Rightarrow\; \log_{10} 10{,}000 = 4$

Es decir, el logaritmo decimal de potencias de diez (con números naturales) es el número de ceros que posee.

Logaritmos naturales

Se llaman logaritmos naturales (hiperbólicos o neperianos) a los logaritmos que tienen por base el número e:

$$\log_e x = \ln x$$

el número e es un número irracional muy importante en Matemáticas y su valor es $e \approx 2.718281\cdots$ y se calcula mediante la expresión:

$$e = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

para cuando x es muy grande.

Cambio de base

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo:

Calcular: $\log_5 120$

Solución.

Se identifican las variables: $a = 5, x = 20, b = 10$ (por usual conveniencia)

$$\log_5 120 = \frac{log_{10} 120}{log_{10} 5} \approx \frac{2.0791}{0.6989} \approx 2.9746$$

Comprobación: $5^{2.9746} \approx 120$

Antilogaritmo

Es el número que corresponde a un logaritmo dado. Consiste en el problema inverso al cálculo del logaritmo de un número.

$$log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{antilog}_a y = x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

es decir, consiste en elevar la base al número resultado :

$log_{10} 49 = 1.6901 \quad \Leftrightarrow \quad \text{antilog}_{10} 1.6901 = 49 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{1.6901} = 49$

Propiedades de los logaritmos

1.- $\log_a 1 = 0$

2.- $\log_a a = 1$

3.- $\log_a a^x = x$

4.- $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

5.- $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

6.- $\log_a (u^n) = n \cdot \log_a u$

7.- $\log_a \left(\sqrt[n]{u}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_a u$

Función logarítmica

Se llama función logarítmica a la función real de variable real:

$$y = \log_a f(x)$$

La función logarítmica es biyectiva definida de $\mathbf{R}^+$ en $\mathbf{R}$ y sus características son:

- La función logarítmica solo está definida sobre los números positivos
- Los números negativos y el cero no tienen logaritmo
- La función logarítmica de base a es la recíproca de la función exponencial de base a
- Las funciones logarítmicas más usuales son la de base 10 y la de base e
- Es la función inversa de la función exponencial.

Ejemplos de funciones logarítmicas:

$y = \log_6 4x^2$

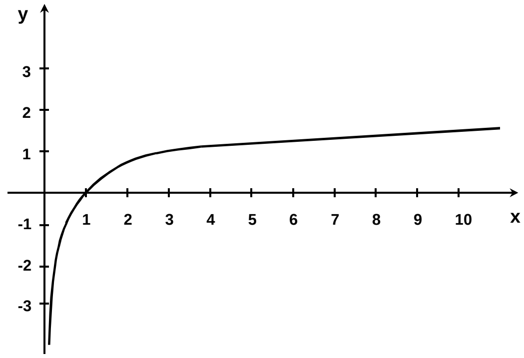
$y = \log_{10} (8x^3 - 2x^2 - 17x + 11)$

$y = \ln (4x - 9)$

III.6 DOMINIO, RANGO Y GRÁFICA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

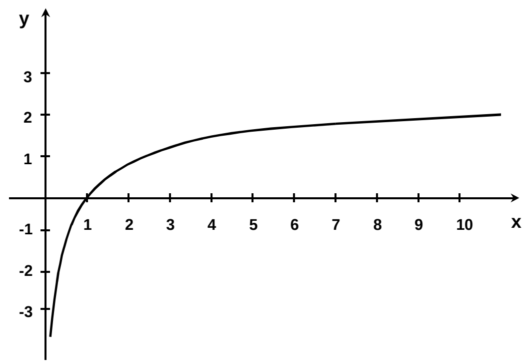
Sea la función $y = \log_{10} x$, si se tabula y se grafica, respectivamente se obtiene lo siguiente:

x	$y = \log_{10} x$
1	0
2	0.3010
3	0.4771
4	0.6020
5	0.6989
6	0.7781
7	0.8450
8	0.9030
9	0.9542
10	1



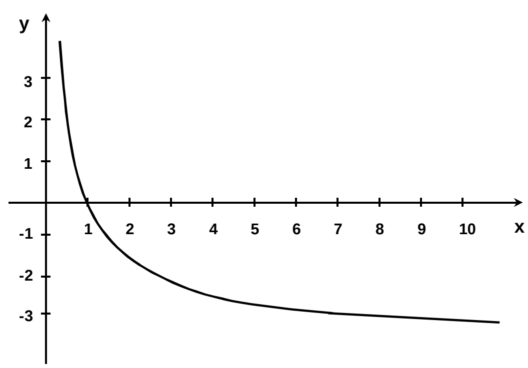
Si la función es $y = \ln x$, la tabulación y la gráfica son las siguientes:

x	$f(x) = \ln x$
1	0
2	0.6931
3	1.0986
4	1.3862
5	1.6094
6	1.7917
7	1.9459
8	2.0794
9	2.1972
10	2.3025



Ahora, considérese la función $y = \log_{0.5} x$, tabulando y graficando se tiene respectivamente:

x	$y = \log_{0.5} x$
1	0
2	-1
3	-1.5849
4	-2
5	-2.3219
6	-2.5849
7	-2.8073
8	-3
9	-3.1699
10	-3.3219



De acuerdo a las gráficas anteriores, se puede concluir que:

- El dominio de la función logarítmica es el conjunto de todos los números reales positivos: $(0,\infty)$
- El rango de la función logarítmica es el intervalo abierto: $(-\infty,\infty)$
- No cruza al eje y, siempre corta al eje x en el punto $P(1,0)$ y pasa por el punto $P(a,1)$
- Siempre es creciente si $a>1$ y siempre es decreciente si $0<a<1$
- La función crece más rápido si la base es cada vez mayor y decrece más rápido si la base es cada vez menor
- Es continua.

Es importante mencionar que se pueden modificar los parámetros de la función logarítmica de manera similar a los que las funciones trigonométricas. Esto es se pueden presentar variaciones de la forma: $f(x)=k\cdot\log_a x$, $f(x)=\log_a k\cdot x$, $f(x)=\log_a (x+k)$, $f(x)=\log_a x+k$, etc.

III.7 ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Las ecuaciones que contienen términos de la forma $\log_a x$ donde a es un número real positivo, con $a\neq 1$, se conocen como ecuaciones logarítmicas. Se pueden resolver aplicando las leyes de los logaritmos de forma tal que pueda llegarse a una expresión con logaritmos de la misma base, sabiendo que: $a^{\log_a u}=u$

Ejemplos.
Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1) $\log_{10} x+\log_{10}(x-3)=1$
Solución.
Aplicando la cuarta propiedad de los logaritmos se tiene: $\log_{10} x(x-3)=1$, elevando a la diez se tiene:
$10^{\log_{10} x(x-3)}=10^1 \quad\Rightarrow\quad x(x-3)=10 \quad\Rightarrow\quad x^2-3x=10 \quad\Rightarrow\quad x^2-3x-10=0$
factorizando el trinomio se obtiene:
$(x+2)(x-5)=0 \quad\Rightarrow\quad x+2=0$ y $x-5=0$
por lo tanto: $x_1=-2$ y $x_2=5$
sin embargo, x_1 debe descartarse como solución debido a que no existe el logaritmo de un número negativo.

2) $\log_{10}(x^3-7x^2+22x)-\log_{10} x=1$
Solución.
Aplicando la quinta propiedad de los logaritmos se tiene: $\log_{10}\dfrac{x^3-7x^2+22x}{x}=1$, que es equivalente a: $\log_{10}(x^2-7x+22)=1$, elevando a la diez se tiene:
$10^{\log_{10}(x^2-7x+22)}=10 \quad\Rightarrow\quad x^2-7x+22=10 \quad\Rightarrow\quad x^2-7x+12=0$
si se factoriza el trinomio se obtiene:
$(x-4)(x-3)=0 \quad\Rightarrow\quad x-4=0$ y $x-3=0$, por lo tanto: $x_1=4$ y $x_2=3$.

3) $\dfrac{\ln(5x-6)}{\ln x}=2 \qquad (x\neq 1)$

Solución.

$\ln(5x-6)=2\cdot\ln x$, ahora, si se aplica la sexta propiedad de los logaritmos se tiene: $\ln(5x-6)=\ln x^2$

elevando a la e se tiene: $e^{\ln(5x-6)}=e^{\ln x^2} \quad \Rightarrow \quad 5x-6=x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-5x+6=0$, factorizando el trinomio se obtiene: $(x-3)(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x-3=0$ y $x-2=0$, por lo tanto: $x_1=3$ y $x_2=2$.

4) $\log_2 x-\log_8 x=4$

Solución.

Cambiando a base dos el segundo término del primer miembro:

$$\log_2 x-\frac{\log_2 x}{\log_2 8}=4 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x-\frac{\log_2 x}{3}=4 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x-\frac{1}{3}\log_2 x=4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}\log_2 x=4 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x=\frac{4\cdot 3}{2} \quad \Rightarrow \quad \log_2 x=6 \quad \Rightarrow \quad x=2^6=64$$

5) $\ln^2 x-5\ln x=6$

Solución.

Haciendo el cambio de variable: $u=\ln x$, se llega a:

$$u^2-5u=6 \quad \Rightarrow \quad u^2-5u-6=0 \quad \Rightarrow \quad (u-6)(u+1)=0$$

$$u-6=0 \quad \Rightarrow \quad u_1=6$$

$$u+1=0 \quad \Rightarrow \quad u_2=-1$$

sustituyendo en $u=\ln 6$:

$$u=\ln x \quad \Rightarrow \quad 6=\ln x \quad \Rightarrow \quad x_1=e^6$$

$$u=\ln x \quad \Rightarrow \quad -1=\ln x \quad \Rightarrow \quad x_2=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

6) $\log_3(4x-5)-\log_3(2x+1)=0$

Solución.

$$\log_3(4x-5)=\log_3(2x+1)$$

Aplicando en ambos miembros el antilogaritmo se llega a:

$$3^{\log_3(4x-5)}=3^{\log_3(2x+1)}$$

$$4x-5=2x+1$$

$$\Rightarrow \quad 4x-2x=1+5 \quad \Rightarrow \quad 2x=6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=3$$

7) $\log_2\left(\log_2 x^2\right)=2$

Solución.

Aplicando ambos en miembros el antilogaritmo se llega a:

$$2^{\log_2\left(\log_2 x^2\right)}=2^2 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x^2=4$$

nuevamente, aplicando en ambos miembros el antilogaritmo se llega a:

$$2^{\log_2 x^2}=2^4 \quad \Rightarrow \quad x^2=16$$

$$x^2=16 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{16}$$

$\Rightarrow \quad x_1=4$ y $x_2=-4$

III.8 APLICACIONES

Algunas aplicaciones de la función exponencial son:

1. El proceso de declinación de la eficiencia de un aparato o instrumento puede ser representado por funciones exponenciales decrecientes. Esto se debe a que por naturaleza la ineficiencia inicial es baja, y a medida que transcurre la vida del equipo va perdiendo sus propiedades por efecto del uso y el desgaste es acumulativo.
2. La presión atmosférica de un globo o aeroplano decrece a medida que aumenta la altura. Esta presión se relaciona a la altura en kilómetros sobre el nivel del mar mediante una expresión de tipo exponencial.
3. En la cicatrización normal de heridas puede obtenerse por medio de una función exponencial. si A_0 representa el área original de la herida y A es igual el área de la herida después de n días, entonces la cicatrización normal de heridas puede obtenerse así: $A = A_0 e^{-0.35n}$.
4. En óptica. Si una sola hoja de vidrio cancela 3% de la luz que pasa por ella, el porcentaje p de luz que pasa por *n* hojas sucesivas esta dado aproximadamente por la ecuación: $p = 100e^{-0.03n}$.
5. La respuesta a la publicidad en la televisión. El porcentaje de personas que respondieron a un comercial televisivo para un nuevo producto después de *t* días se encuentra con la expresión: $R = 70 - 100e^{-0.2t}$.

Por su parte, algunas aplicaciones de la función logarítmica son:

1. El 19 de septiembre de 1985, un terremoto de intensidad 8.1 en la escala de Richter sacudió la Ciudad de México. Aunque se sabe que esta cifra corresponde a un terremoto de gran intensidad, no siempre se sabe interpretar ya que para ello es necesario conocer el concepto de logaritmo. La escala de Richter es una de ellas, y mide la energía liberada en el movimiento con la rotura de las rocas. Para elaborarla se mide la amplitud máxima de las ondas que registra el sismógrafo y se define la magnitud M del sismo como el logaritmo de dicha amplitud al que se añade una constante que depende de la distancia del observatorio al epicentro y del periodo de las ondas registradas. La relación entre la energía liberada, E, y la magnitud del terremoto viene dada por $\log E = 1.5M - 1.74$, de donde se deduce que para una variación de un solo punto en la escala de magnitudes, la energía liberada se multiplica por $10^{1.5}$, es decir, aproximadamente por treinta.
2. En Química, en una disolución, el producto de las concentraciones de iones H+ y OH- es siempre constante e igual a $10^{-14}\ \dfrac{moles}{litro}$. El pH se define como $-log[H+]$. Si se considera que una sustancia es neutra cuando $[H+] = [OH-] = 10^{-7}$, lo que equivale a un $pH = 7$. Una disolución es ácida si su pH es inferior a 7, y básica si es superior a 7. De ahí que un shampoo suave sea el de $pH = 7$ o neutro, y que la nueva tendencia sea utilizar productos con $pH = 5.5$, el que mejor se adapta al pH de la piel.
3. En la arqueología, también se han aprovechado las ventajas de los logaritmos. El carbono 14, C^{14}, es radiactivo y mientras que en la materia viva mantiene una proporción constante, en la materia muerta su proporción disminuye. La relación entre la edad t de un objeto y la velocidad de desintegración y del C^{14} presente en él viene dada por $\ln y = 2.52 - 0.00012t$. Por lo tanto,

midiendo la cantidad de C^{14} que permanece en la materia se puede calcular la edad al despejar t de la ecuación[2].

4. La intensidad sonora en decibelios, utilizando logaritmos decimales
5. El cálculo de la luminosidad de las estrellas emplea logaritmos en base 2.5.
6. La concentración de alcohol en la sangre de una persona se puede medir y según las investigaciones médicas sugieren que el riesgo de tener un accidente al manejar un vehículo pude obtenerse por una ecuación con logaritmos.

[2] De este modo se encontró que los restos de sarcófagos egipcios tenían una antigüedad de aproximadamente 4,600 años. Este método es fiable sólo para edades inferiores a 35,000 años.