RELACIONES Y FUNCIONES

UNIDAD I

I.1 PRODUCTO CARTESIANO

Es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas, cuyo primer elemento de la pareja ordenada pertenece a un primer conjunto y cuyo segundo elemento pertenece a un segundo conjunto. Si A y B son dos conjuntos su producto cartesiano se denota $A\times B$ o $B\times A$ y se lee respectivamente: "A cruz B" o "B cruz A".

Ejemplo.

Sea un conjunto integrado por los nombres de mujer: $A=\{Ana, Fabiola, Tania\}$ y otro integrado por los apellidos: $B=\{Hernández, López, Pérez, Sánchez\}$.

El producto cartesiano $A\times B$ es:

$$\begin{gathered} A\times B=\{(Ana, Hernández),(Ana, López),(Ana, Pérez),(Ana, Sánchez) \\ (Fabiola, Hernández),(Fabiola, López),(Fabiola, Pérez),(Fabiola, Sánchez) \\ (Tania, Hernández),(Tania, López),(Tania, Pérez),(Tania, Sánchez)\} \end{gathered}$$

Dado que las respectivas cardinalidades de los conjuntos son: $\eta(A)=3$ y $\eta(B)=4$, entonces: $\eta(A\times B)=12$

Asimismo, se tiene que:

$$\begin{gathered} B\times A=\{(Hernández, Ana),(Hernández, Fabiola),(Hernández, Tania) \\ (López, Ana),(López, Fabiola),(López, Tania) \\ (Pérez, Ana),(Pérez, Fabiola),(Pérez, Tania) \\ (Sánchez, Ana),(Sánchez, Fabiola),(Sánchez, Tania)\} \end{gathered}$$

Nótese como $A\times B\neq B\times A$

I.2 RELACIONES

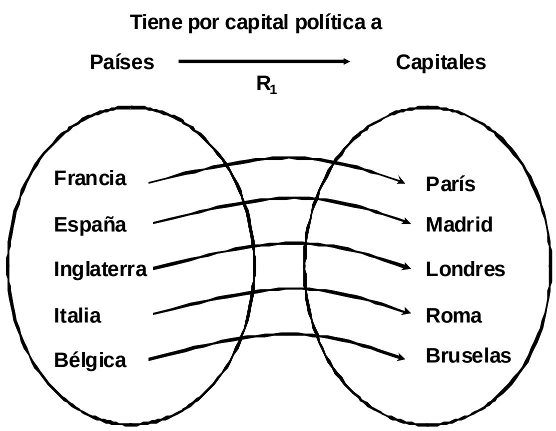
Una relación es un conjunto de parejas ordenadas, formadas de la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos dados.

Tomando el ejemplo anterior, algunas relaciones pueden ser:

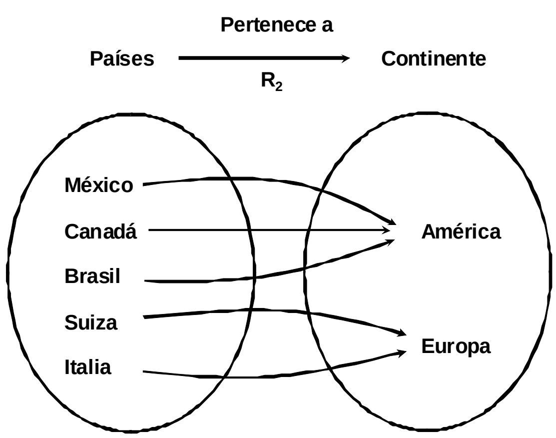
$$\begin{aligned} &R_1: A\to B \quad r=\{(Ana, Hernández),(Fabiola, López),(Fabiola, Pérez),(Tania, Sánchez)\} \\ &R_2: A\to B \quad r=\{(Ana, López),(Fabiola, Hernández),(Tania, Hernández),(Tania, López)\} \end{aligned}$$

Otros ejemplos de relaciones establecidas entre los elementos de dos conjuntos pueden ser:

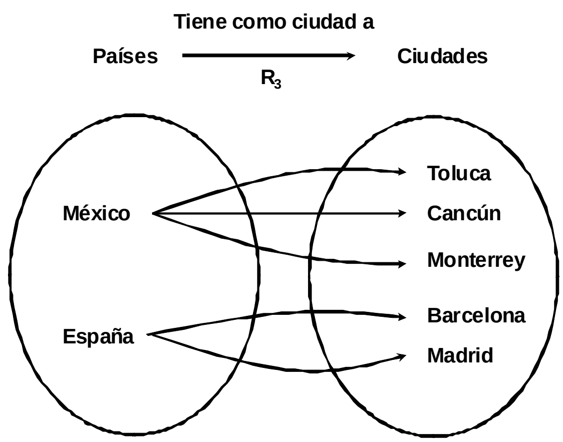
1. La distancia recorrida por un vehículo con su velocidad.
2. Los nombres de los alumnos con su calificación.
3. Los presidentes de un país con el periodo de presidencia.
4. Sea A el conjunto formado por todos los países del mundo y sea B el conjunto formado por todas las capitales políticas del mundo. La relación R_1 = "tiene por capital política a" establece que solamente existe un elemento del segundo conjunto que se puede asociar con cada elemento del primer conjunto. Ejemplos de elementos de esta relación son: $(Francia, París)$, $(España, Madrid)$, $(Inglaterra, Londres)$, etc.



5. Sea A el conjunto formado por los países del mundo y sea B el conjunto formado por los continentes. La relación R_2 = "pertenece a" establece que dos ó más elementos del primer conjunto son asociados con cada elemento del segundo conjunto. Ejemplos de los elementos de esta relación son: $(México, América)$, $(Canadá, América)$, $(Brasil, América)$, $(Suiza, Europa)$, $(Italia, Europa)$.

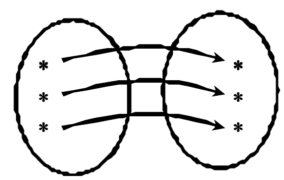


6. Sea A el conjunto formado por los países del mundo y sea B el conjunto formado por las ciudades del mundo. La relación R_3 = "tiene como ciudad a", establece que para un elemento del primer conjunto son asociados dos ó más elementos del segundo conjunto. Ejemplos de los elementos de esta relación son: $(México, Toluca)$, $(México, Cancún)$, $(México, Monterrey)$, $(España, Madrid)$, $(España, Barcelona)$.

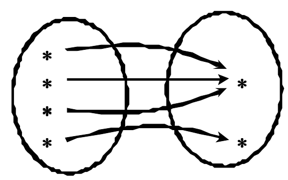


Las relaciones se pueden clasificar como:

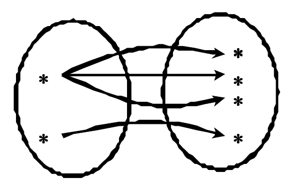
Caso 1. De un elemento del primer conjunto a un elemento del segundo conjunto:



Caso 2. De dos o más elementos del primer conjunto a un elemento del segundo conjunto:



Caso 3. De un elemento del primer conjunto a dos o más elementos del segundo conjunto:



I.3 CONCEPTO DE FUNCIÓN

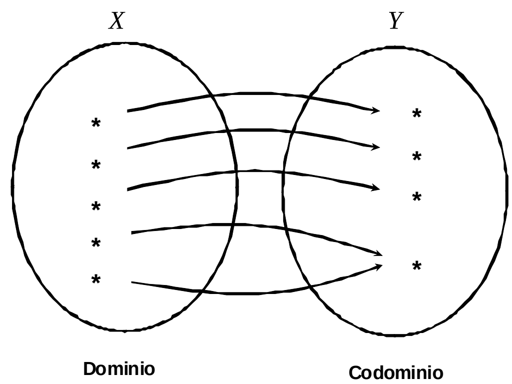
Una *función* es una relación con la característica de que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solamente un elemento del segundo conjunto.

Formalmente, para poder establecer una función es necesario que:

1) Exista un conjunto X llamado *dominio* de la función.
2) Exista un conjunto Y llamado *codominio* de la función.
3) Exista una *regla de correspondencia* entre los dos conjuntos, de tal forma que a los elementos del dominio les haga corresponder *uno y solo uno de los elementos del codominio*.

Una función se denota usualmente por una letra minúscula, por ejemplo: f , g , etc.

Ejemplo.
La correspondencia entre los conjuntos X y Y :



representa una función ya que cada elemento del dominio tiene asociado uno y sólo un elemento del codominio.

Una función f definida del conjunto X al conjunto Y se denota como $f : X \rightarrow Y$. X corresponde al dominio de la función, Y pertenece al codominio de la función y f es la característica de la función (regla de correspondencia). La característica indica que se debe hacer con cada elemento del conjunto X para obtener los elementos correspondientes en el conjunto Y.

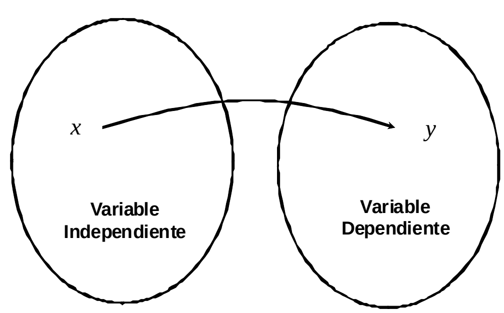
Es posible describir los elementos de una función si se utiliza un diagrama, también es posible especificar las parejas ordenadas formadas cuando el número resultante de ellos, después de haber aplicado la función, es pequeño. Sin embargo, no siempre se trabaja con funciones donde el número de parejas ordenadas resultantes es finito. En estos casos, para describir una función es necesario establecer claramente cual es la regla de correspondencia y sobre que elementos se puede aplicar.

Para indicar los elementos del dominio se escoge una letra que representa a todos los elementos de este conjunto. Esta letra recibe el nombre de variable, ya que puede tomar como valor cualquier elemento del conjunto. Usualmente se escoge la letra x.

El valor que toma la variable x no depende de ninguna condición. Esta variable puede tomar como valor cualquier elemento del dominio, por eso se le llama variable independiente.

Los elementos del segundo conjunto también pueden ser representados si utilizamos una variable (usualmente la letra y). No obstante, esta segunda variable depende del valor que se le ha asignado a la variable independiente, y es por eso que recibe el nombre de variable dependiente.

Considerando lo anterior, si y es una función de x, lo cual se expresa simbólicamente como: $y = f(x)$.



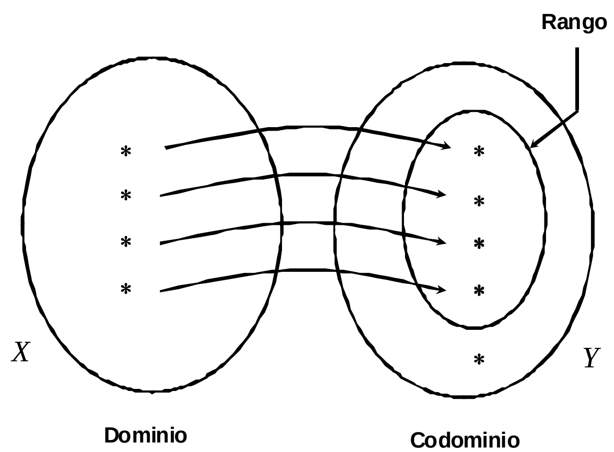
DOMINIO DE UNA FUNCION

El dominio de una función no se especifica, sino que sólo se da una regla o ecuación que define la función. El dominio de una función f de variable real es el conjunto de números reales para el cual la regla tiene sentido o, más específicamente, para el cual el valor $f(x)$ es un número real.

IMAGEN Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

El elemento que se obtiene en el segundo conjunto después de aplicar la regla de correspondencia a un elemento del primer conjunto, recibe el nombre de *imagen*. Si x es el elemento en el dominio la imagen se denota como $f(x)$.

Rango o *recorrido* es el conjunto formado por todas las imágenes correspondientes al dominio.



Ejemplo.

Dada la función $y = x^2$, $x \in \mathbf{N}$, $2 \le x \le 6$, identificar sus características.

Solución.

Se efectúa la tabulación:

x	y
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

El dominio es el primer conjunto de la función: $X = \{2,3,4,5,6\}$

El codominio es el segundo conjunto de la función: $Y = \{4,9,16,25,36\}$

La imagen de 2 es 4, de 3 es 9, de 4 es 16, de 5 es 25 y de 6 es 36

El rango es el conjunto de imágenes: $R = \{4,9,16,25,36\}$

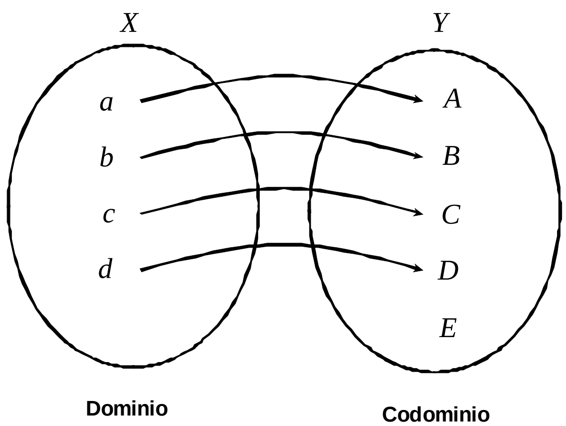
I.4 CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

Las funciones pueden clasificarse de la siguiente forma:

$$\text{Funciones} \begin{cases} \text{Inyectivas} \\ \text{Suprayectivas} \\ \text{Biyectivas} \end{cases}$$

- Una función *inyectiva* es aquella que al tomar dos valores diferentes en el dominio sus imágenes van a ser diferentes.
- Una función suprayectiva es cuando el rango es igual al codominio. Eso significa que todos los elementos del codominio están relacionados con alguno del dominio.
- Una función es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva simultáneamente.

Ejemplo.
Sea la siguiente función:



El dominio es $X = \{a, b, c, d\}$
El codominio es $Y = \{A, B, C, D, E\}$
La imagen de a es A; de b es B; de c es C; y de d es D
El rango es $R = \{A, B, C, D\}$
Se trata de una función inyectiva puesto que la asociación es uno a uno, independientemente de que sobre el elemento E.

Ejemplo.
Sea la función: $f(x) = 2x^2 + 1$, $x \in \mathbb{Z}$, $-3 \le x \le 3$
Si se tabula, se tiene:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	19	9	3	1	3	9	19

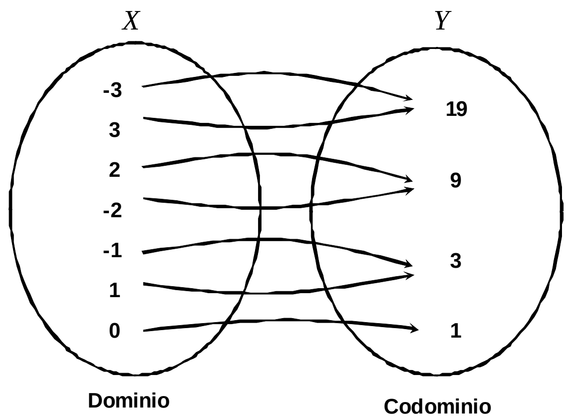
El dominio es $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
El codominio es $Y = \{1, 3, 9, 19\}$

La imagen de -3 y 3 es 19, de -2 y 2 es 9, de -1 y 1 es 3 y de 0 es 1

El rango es $R=\{1,3,9,19\}$

Se trata de una función suprayectiva porque todos los elementos del codominio están asociados con al menos uno del dominio.

Gráficamente esto es:



Ejemplo.

Sea la función $f(x)=4x,\ x\in \mathbf{N},\ x\leq 5$

Tabulando, se tiene:

x	1	2	3	4	5
y	4	8	12	16	20

El dominio es $X=\{1,2,3,4,5\}$

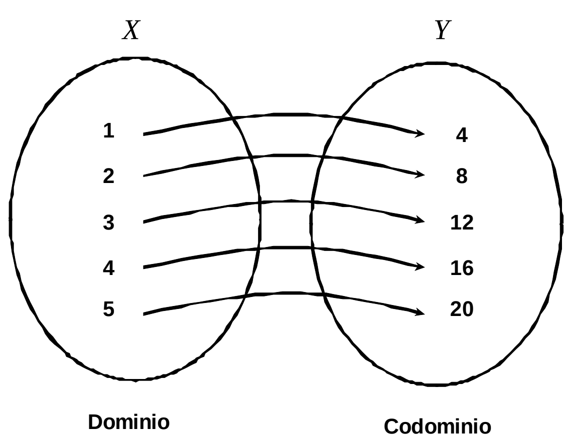
El codominio es $Y=\{4,8,12,16,20\}$

La imagen de 1 es 4, de 2 es 8, de 3 es 12, de 4 es 12 y de 5 es 20

El rango es $R=\{4,8,12,16,20\}$

Al cumplir con ser una función inyectiva y suprayectiva, es también biyectiva.

Gráficamente esto es:



La definición formal de función de una variable es la siguiente:

Sea X un conjunto de números reales, una función *f* de una variable es una correspondencia que asocia a cada número x que pertenece a X uno y sólo un número real y que pertenece a un conjunto Y. Cada elemento de Y se determina por: $y = f(x)$. El conjunto X se llama *Dominio* de la función y el conjunto Y *Codominio*.

Entonces, una función es un conjunto de pares ordenados (x, y) en donde no puede haber dos parejas distintas en que se repita el primer elemento.

Ejemplos de funciones de una variable independiente:

1) $f(x) = 3x - 2$ $\quad\_(1)$
2) $g(x) = \sqrt{x^3 - 7}$ $\quad\_(2)$

La expresión de la función (1) indica que para hallar la imagen de un valor particular de x, se debe multiplicarlo por 3 y al resultado restarle 2 unidades. La fórmula de la función (2) hace que a los valores de x se les eleve a la tercera potencia, al resultado se le reste 7 unidades y al total se le extraiga raíz cuadrada. En la práctica, lo que se debe hacer, para hallar el valor correspondiente de la función para un valor particular de x (que pertenezca al dominio de la función), es reemplazar en la expresión la x por el valor particular asignado y efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplos.
Calcular la imagen para $x = 2$ en las funciones (1) y (2).
Solución.

1) $f(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$
que se lee como "f de dos es igual a cuatro"
2) $g(2) = \sqrt{2^3 - 7} = \sqrt{8 - 7} = \sqrt{1} = 1$
que se lee como "g de dos es igual a uno"

Otra notación adecuada para establecer el conjunto de pares ordenados de una función de una variable independiente es:

$$f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

A x y y se les llama *variables.* La x recibe el nombre de *variable independiente*, por su parte, la y se le conoce como *variable dependiente*. La razón de ello es que la x puede tomar valores arbitrarios (siempre y cuando pertenezcan al dominio de la función); mientras que la y obtiene su valor dependiendo del asignado a x y, después de pasar por las operaciones que indica la fórmula de la función.

El dominio de una función es aquel conjunto de números que puede tomar la variable independiente. Al trabajar con los números reales, se deben tener en cuenta dos restricciones importantes: 1) la división por cero no existe" y 2) la raíz de índice par de números negativos no está definida en los reales". El dominio de una función se halla, por lo general, de una forma analítica.

Ejemplos.
Hallar el dominio de las siguientes funciones:

1) $f_1(x) = 4x + 5$
Solución.

Como no se tiene ninguna de las restricciones, el dominio de la función es todos los números reales. $D_{f_1}=(-\infty,\infty)$

2) $f_2(x)=\frac{-2}{x-3}$

Solución.

Se tiene un cociente, cuyo denominador debe ser diferente de cero. Por lo tanto: $x-3\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq 3$. Esto significa que el dominio de la función es: $D_{f_2}=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$.

3) $f_3(x)=\frac{x+6}{x^2+3x-4}$

Solución.

Se tiene un cociente, cuyo denominador debe ser diferente de cero. Por lo tanto: $x^2+3x+4\neq 0$, factorizando se tiene: $(x+4)(x-1)\neq 0$.

$\Rightarrow\quad x+4\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq -4$

$\Rightarrow\quad x-1\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq 1$

Esto significa que el dominio de la función es: $D_{f_3}=(-\infty,-4)\cup(-4,1)\cup(1,\infty)$.

4) $f_4(x)=\sqrt{2x+10}$

Solución.

Se tiene una raíz de índice par, por lo que el radicando debe ser mayor o igual a cero:

$$2x+10\geq 0 \quad\Rightarrow\quad 2x\geq -10 \quad\Rightarrow\quad x\geq -\frac{10}{2} \quad\Rightarrow\quad x\geq -5$$

Esto significa que el dominio de la función es: $D_{f_4}=[-5,\infty)$.

5) $f_5(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{2x-8}}$

Solución.

En este caso se tiene una raíz de índice impar, cuyo denominador debe ser diferente de cero. Por lo tanto: $2x-8\neq 0 \quad\Rightarrow\quad 2x\neq 8 \quad\Rightarrow\quad x\neq \frac{8}{2} \quad\Rightarrow\quad x\neq 4$. Esto significa que el dominio de la función es: $D_{f_2}=(-\infty,4)\cup(4,\infty)$.

I.5 TIPOS DE FUNCIONES

FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA EXPLÍCITA

En general, si es posible resolver una ecuación para y en términos de x, se escribe $y=f(x)$ y se dice que la función esta dada explícitamente. Esto significa que la variable dependiente está despejada.

Ejemplos.

1) $y=f(x)=-3x+5$

2) $y=f(x)=\frac{x^2-6}{x-4}$

FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA IMPLÍCITA

Por otra parte, cuando la regla que define a una función f esta dada por una ecuación en x y y, de la forma $f(x,y)=0$, se dice que la función esta dada implícitamente. Esto significa que la variable dependiente no está despejada.

Ejemplos.

1) $3x+y-5-2xy=0$

2) $8x^2-y+2-y^2-6x^3y=0$

FUNCIONES ALGEBRAICAS

Son aquellas en que aparecen las operaciones de suma, resta, multiplicación, división potenciación y radicación.

Ejemplos.

1) $y=\dfrac{\sqrt{3x}+5}{7x^3-12}$

2) $y=\dfrac{\left(5x^3-1\right)^2}{\sqrt[3]{9-x^4}}$

FUNCIONES TRASCENDENTES

Son las funciones trigonométricas, las trigonométricas inversas, las logarítmicas y las exponenciales.

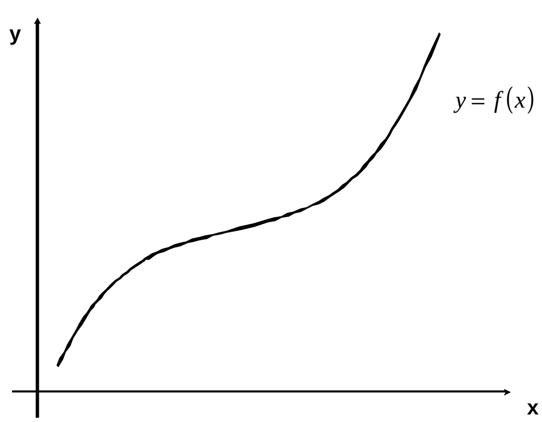
Ejemplos.

1) $y=4\operatorname{sen}x-6\log_{10}5x^2$

2) $y=-5\tan^{-1}8x-7e^{4x}$

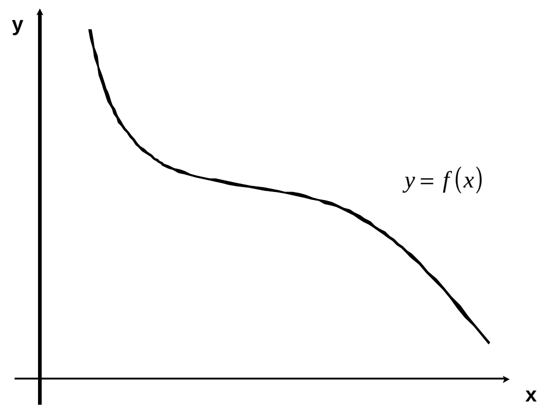
FUNCIONES CRECIENTES

Una función f es creciente sobre un intervalo (rango de dos valores pertenecientes a los números reales tales que uno es mayor que otro) en **R** si, para cualquier x_1 y x_2 en **R**, donde $x_1<x_2$, se tiene que $f(x_1)<f(x_2)$, es decir, los valores de función se incrementan.



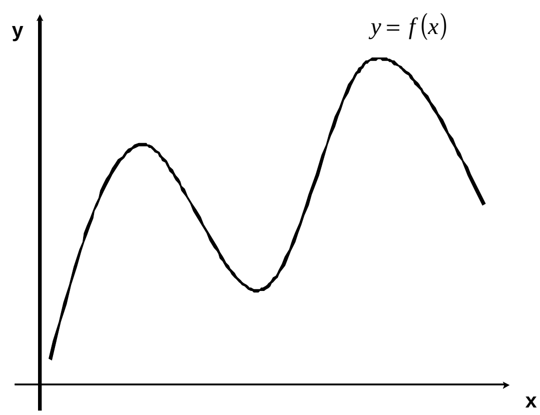
FUNCIONES DECRECIENTES

Una función f es decreciente sobre un intervalo en **R** si, para cualquier x_1 y x_2 en **R**, donde $x_1 > x_2$, se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$, es decir, los valores de función disminuyen.

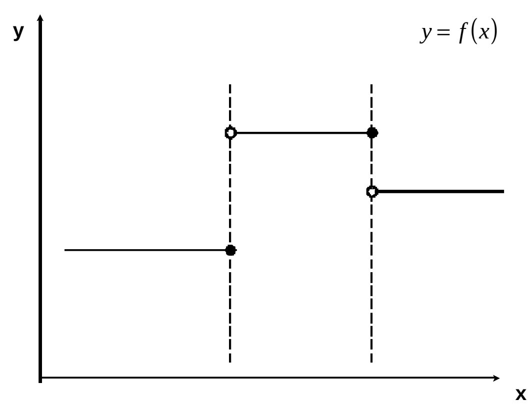


FUNCIONES CONTINUAS

Una función es continua cuando su gráfica no presenta ningún "corte".



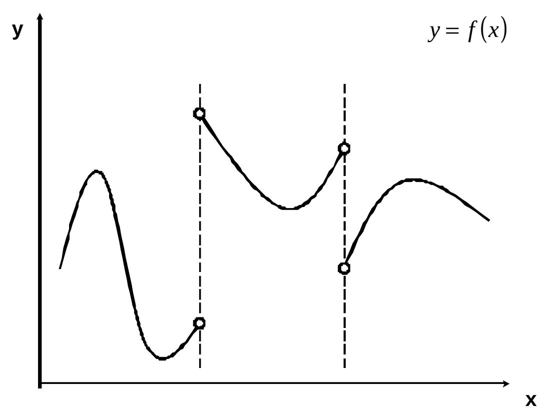
Existen funciones que se definen a través de intervalos cuyo dominio es $(-\infty,\infty)$, sin embargo no son continuas, por ejemplo:



Ejemplos.
1. En la función $y = 4x - 7$, no existe un valor de x que haga que la curva tenga un corte o "brinco" por lo tanto, es continua.
2. En la función $y = \sqrt{12 - 3x}$, se sabe que para que esté definido en **R**, se debe de cumplir que, $12 - 3x \geq 0$ o bien: $12 \geq 3x$, resolviendo: se tiene que $x \leq 4$, por lo que el dominio es **R** a partir de valores iguales o menores a 4. Así que es continua en el intervalo $(-\infty, 4]$.

FUNCIONES DISCONTINUAS

Una función es discontinua si su gráfica presenta al menos un "corte".



Ejemplos.
1. En la función $y = \dfrac{1}{x - 3}$, el valor de y para $x = 3$ no está definido, por lo que el dominio es **R** exceptuando $x = 3$. El dominio puede expresarse como la unión de los intervalos $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, así que es discontinua en ese valor.
2. En la función $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$, los valores de y para $x = -2$ y $x = 2$ no están definidos, por lo que el dominio es **R** exceptuando $x = -2$ y $x = 2$. El dominio puede expresarse como la unión de los intervalos $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$, así que la función es discontinua para estos dos valores.

I.6 GRÁFICA DE FUNCIONES

El rango, R, de una función es el conjunto de todos los posibles valores que asume la función al ser evaluada en cada valor del dominio. Esto significa que son los valores que se obtiene al evaluarla, para los cuales la función tiene sentido.

Cuando la regla que define una función f esta dada por una ecuación en x y y, la gráfica de f es el conjunto de puntos (x, y) en el plano cartesiano que satisfacen la ecuación.

No todo grupo de puntos en el plano cartesiano representa la gráfica de una función. Si se recuerda que para una función f, cada número x en el dominio de f tiene una y solo una imagen. Así, la gráfica de una función f no puede contener dos puntos con la misma coordenada x y diferentes coordenadas y. Por tanto, la gráfica de una función debe satisfacer la siguiente prueba de la línea vertical: un conjunto de puntos en el plano cartesiano es la gráfica de una función sí una línea vertical intersecta la gráfica *sólo en un punto*.

Cuando se quiere graficar una función, primero se tiene que expresar en forma explícita, después se establece su dominio a fin de elegir adecuadamente los valores de x para tabular obteniendo suficientes valores y finalmente se unen los puntos para trazar la gráfica.

Del comportamiento de su gráfica, también se puede obtener el rango R, de una función. El rango, como se ha definido, es el conjunto de todos los posibles valores que asume la función al ser evaluada en cada valor del dominio. Esto significa que son los valores que se obtiene al evaluarla, para los cuales la función tiene sentido.

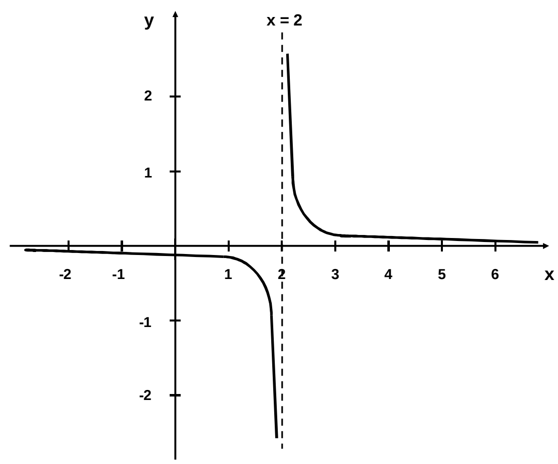
Ejemplos.
Dadas las siguientes funciones, obtener el dominio, trazar su grafica y obtener su rango:

1) $y = \dfrac{1}{x-2}$

Solución.

Se tiene un cociente, cuyo denominador debe ser diferente de cero. Por lo tanto: $x - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2$.
Esto significa que el dominio de la función es: $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.
La función existe para toda x excepto en $x = 2$, así que tabulando se tiene:

x	y	x	y
-8	-0.100	2	No definido
-7	-0.111	3	1.000
-6	-0.125	4	0.500
-5	-0.143	5	0.333
-4	-0.167	6	0.250
-3	-0.200	7	0.200
-2	-0.250	8	0.167
-1	-0.333	9	0.143
0	-0.500	10	0.125
1	-1.000	11	0.111



Para obtener el rango, se despeja x de $y = \dfrac{1}{x-2}$:

$$(x-2)y = 1 \quad \Rightarrow \quad xy - 2y = 1 \quad \Rightarrow \quad xy = 1 + 2y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1+2y}{y}$$

Se tiene un cociente, cuyo denominador debe ser diferente de cero. Por lo tanto: $y \neq 0$. Esto significa que el rango de la función es: $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

De la gráfica se puede comprobar que el rango de la función es: $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

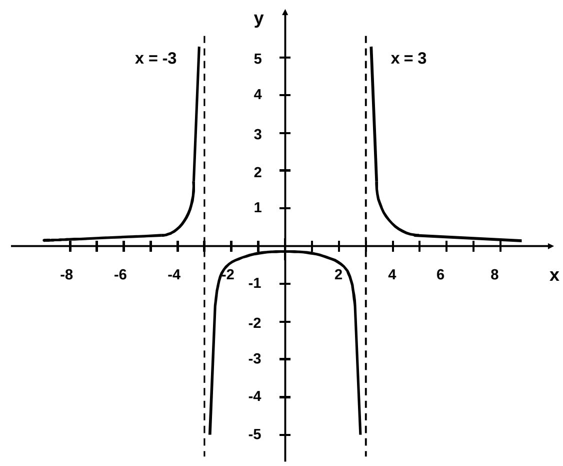
2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

Solución.

Se tiene un cociente, cuyo denominador debe ser diferente de cero. Por lo tanto: $x^2 - 9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad x \neq -3$ y $x \neq 3$. Esto significa que el dominio de la función es: $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

La función existe para toda x excepto en $x = -3$ y en $x = 3$, así que tabulando se tiene:

x	y	x	y
-10	0.011	1	-0.125
-9	0.014	2	-0.200
-8	0.018	3	No definido
-7	0.025	4	0.143
-6	0.037	5	0.063
-5	0.063	6	0.037
-4	0.143	7	0.025
-3	No definido	8	0.018
-2	-0.200	9	0.014
-1	-0.125	10	0.011
0	-0.111		



Para obtener el rango, se despeja x de $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$:

$$(x^2 - 9)y = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 y - 9y = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 y = 1 + 9y \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1+9y}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1+9y}{y}}$$

Se tiene un radical con cociente, cuyo radicando debe ser positivo y el denominador debe ser diferente de cero. Resolviendo la desigualdad $\dfrac{1+9y}{y} > 0$:

- si $y > 0$: $1 + 9y > 0 \quad \Rightarrow \quad 9y > -1 \quad \Rightarrow \quad y > -\dfrac{1}{9}$, entonces la intersección es: $y > 0$
- si $y < 0$: $1 + 9y < 0 \quad \Rightarrow \quad 9y < -1 \quad \Rightarrow \quad y < -\dfrac{1}{9}$, entonces la intersección es: $y < -\dfrac{1}{9}$

Por lo tanto, el rango de la función es: $R_f = \left(-\infty, -\dfrac{1}{9}\right) \cup \left(\dfrac{1}{9}, 0\right) \cup (0, \infty)$.

De la gráfica se puede comprobar que el rango de la función es: $R_f = \left(-\infty, -\dfrac{1}{9}\right) \cup \left(\dfrac{1}{9}, 0\right) \cup (0, \infty)$

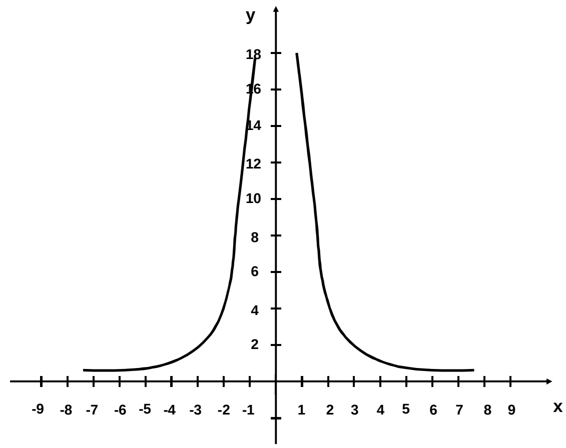
3) $y = \dfrac{16}{x^2}$

Solución.

Se tiene un cociente, cuyo denominador debe ser diferente de cero. Por lo tanto: $x^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm\sqrt{0} \quad \Rightarrow \quad x \neq 0$. Esto significa que el dominio de la función es: $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

La función existe para toda x excepto en $x=0$, así que tabulando se tiene:

x	y	x	y
-8	0.250	1	16.000
-7	0.327	2	4.000
-6	0.444	3	1.778
-5	0.640	4	1.000
-4	1.000	5	0.640
-3	1.778	6	0.444
-2	4.000	7	0.327
-1	16.000	8	0.250
0	No definido		



Para obtener el rango, se despeja x de $y=\frac{16}{x^2}$:

$$x^2 y = 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{16}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{16}{y}}$$

Se tiene un radical con cociente, cuyo radicando debe ser positivo y el denominador debe ser diferente de cero. Resolviendo la desigualdad $\frac{16}{y} > 0$, se observa que para que se cumpla y debe ser siempre positiva.

Por lo tanto, el rango de la función es: $R_f = (0, \infty)$.

De la gráfica se puede comprobar que el rango de la función es: $R_f = (0, \infty)$

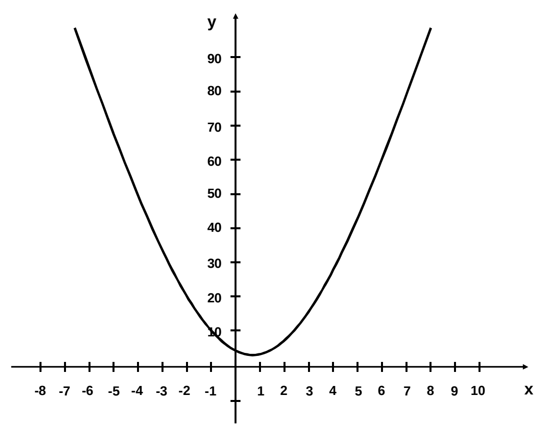
4) $y = 2x^2 - 3x + 5$

Solución.

Como no se tiene ninguna restricción, el rango de la función es todos los números reales. $D_f = (-\infty, \infty)$.

La función existe para toda x porque no hay ningún valor de x que impida que la función no esté definida en **R**, así que tabulando se tiene:

x	y	x	y
-8	157	1	4
-7	124	2	7
-6	95	3	14
-5	70	4	25
-4	49	5	40
-3	32	6	59
-2	19	7	82
-1	10	8	109
0	5		



Para obtener el rango, se despeja x de $y = 2x^2 - 3x + 5$:

$$2x^2 - 3x + 5 - y = 0$$

Aplicando fórmula general con: $a=2,\ b=-3,\ c=5-y$, se tiene:

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(5-y)}}{2(2)}=\frac{3\pm\sqrt{9-40+8y}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{8y-31}}{4}$$

Para que la ecuación tenga solución se debe cumplir que: $8y-31>0$

es decir: $8y>31 \quad \Rightarrow \quad y>\frac{31}{8}$

Por lo tanto, el rango de la función es: $R_f=\left[\frac{31}{8},\infty\right)$.

De la gráfica se puede comprobar que el rango de la función es: $R_f=\left[\frac{31}{8},\infty\right)$.

5) $y=\frac{x^2-4}{x-2}$

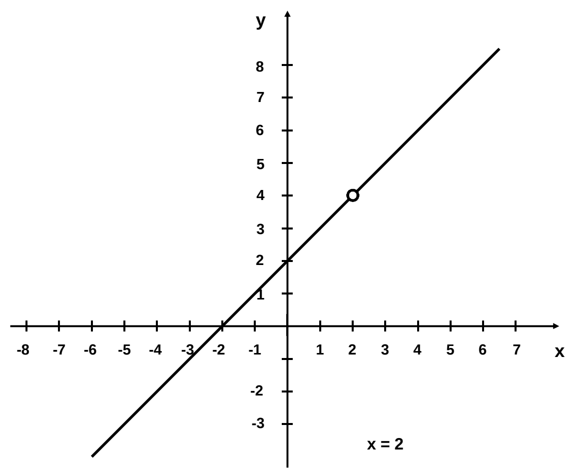
Solución.

Se tiene un cociente, cuyo denominador debe ser diferente de cero. Por lo tanto: $x-2\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq 2$.

Esto significa que el dominio de la función es: $D_f=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.

La función existe para toda x excepto en $x=2$, así que tabulando se tiene:

x	y	x	y
-8	-6	3	3
-7	-5	4	No definido
-6	-4	5	5
-5	-3	6	6
-4	-2	7	7
-3	-1	8	8
-2	0	9	9
-1	1	10	10
0	2		



Para obtener el rango, se despeja x de $y=\frac{x^2-4}{x-2}$:

$(x-2)y=x^2-4 \quad \Rightarrow \quad xy-2y=x^2-4 \quad \Rightarrow \quad x^2-xy+2y-4=0$

Aplicando fórmula general con: $a=1,\ b=-y,\ c=2y-4$, se tiene:

$$x=\frac{-(-y)\pm\sqrt{(-y)^2-4(1)(2y-4)}}{2(1)}=\frac{y\pm\sqrt{y^2-8y+16}}{2}$$

Para que la ecuación tenga solución se debe cumplir que: $y^2-8y+16>0$

es decir: $(y-4)^2>0$. Se observa que para que se cumpla la desigualdad y debe ser diferente de cuatro.

Por lo tanto, el rango de la función es: $R_f=(-\infty,4)\cup(4,\infty)$.

De la gráfica se puede comprobar que el rango de la función es: $R_f = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

Nótese como esta función se puede factorizar, como $y = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$, sin embargo, a pesar de que parece que son iguales, en la función original sigue sin existir en $x = 2$. Por lo tanto, el orificio que aparece en la gráfica, significa una discontinuidad en la recta original.

6) $y = \sqrt{3x-12}$

Solución.

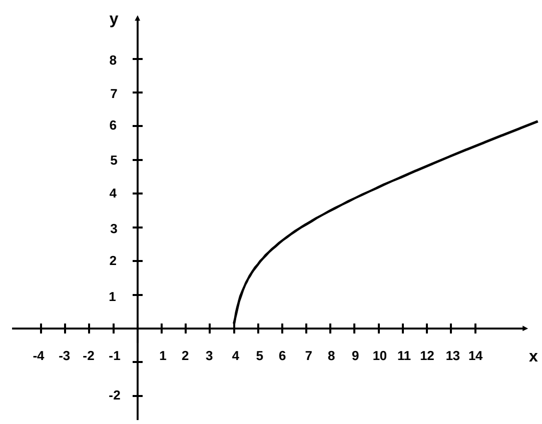
Se tiene una raíz cuadrada, por lo que el radicando debe ser mayor o igual a cero:

$$3x-12 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3x \geq 12 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{12}{3} \quad \Rightarrow \quad x \geq 4$$

Esto significa que el dominio de la función es: $D_f = [4, \infty)$.

La función existe para toda valores de x iguales o mayores a cuatro, así que tabulando se tiene:

x	y
4	0
5	1.732
6	2.449
7	3
8	3.464
9	3.873
10	4.243
11	4.583
12	4.899
13	5.196



Analizando el comportamiento de la función $y = \sqrt{3x-12}$, se aprecia que el resultado de una raíz cuadrada nunca puede ser negativo, por lo que todos las imágenes deben ser positivas o cero. Entonces, el rango de la función es: $R_f = [0, \infty)$

De la gráfica se puede comprobar que el rango de la función es: $R_f = [0, \infty)$.

7) $y = \sqrt{1-x^2}$

Solución.

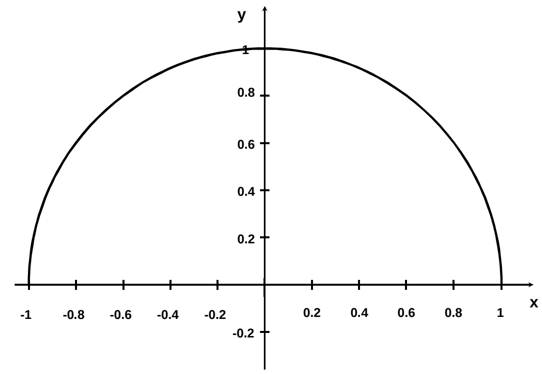
Se tiene una raíz cuadrada, por lo que el radicando debe ser mayor o igual a cero:

$1-x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \leq 1$, así que resolviendo se tiene que existe para $-1 \leq x \leq 1$.

Esto significa que el dominio de la función es: $D_f = [-1, 1]$.

La función existe sólo de -1 a 1, así que tabulando se tiene:

x	y	x	y
-1	0	0.1	0.995
-0.9	0.436	0.2	0.980
-0.8	0.6	0.3	0.954
-0.7	0.714	0.4	0.917
-0.6	0.8	0.5	0.866
-0.5	0.866	0.6	0.8
-0.4	0.917	0.7	0.714
-0.3	0.954	0.8	0.6
-0.2	0.980	0.9	0.436
-0.1	0.995	1	0
0	1		



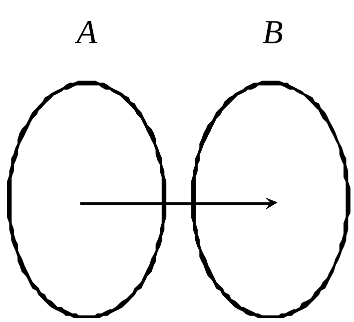
Para obtener el rango, se despeja x de $y=\sqrt{1-x^2}$:

$y^2=1-x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=1-y^2 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{1-y^2}$, se tiene una raíz cuadrada, por lo que el radicando debe ser mayor o igual a cero: $1-y^2>0 \quad \Rightarrow \quad y^2\le 1$, así que resolviendo se tiene que existe y para $1\le y\le 1$, sin embargo, el intervalo $[-1,0)$ debe eliminarse para que para que cumpla con la condición de función. Por lo tanto, el rango de la función es: $R_f=[0,1]$.

De la gráfica se puede comprobar que el rango de la función es: $R_f=[0,1]$.

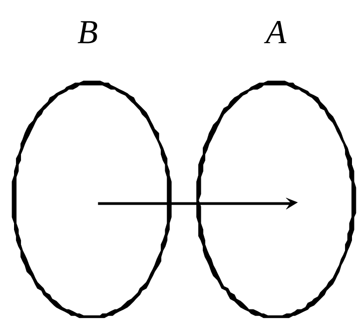
I.7 FUNCION INVERSA

Si f es una función que tiene por dominio al conjunto A y por rango al conjunto B, entonces se llama la función inversa de f, aquella que tiene por dominio el conjunto B y por rango al conjunto A. A la función inversa de f se le denota por f^{-1}. Esquemáticamente esto es:



$f:A\rightarrow B$

Función directa



$f^{-1}:B\rightarrow A$

Función inversa

Dada una función $f(x)$, su inversa es otra función, designada por $f^{-1}(x)$ de forma que se verifica que: Si $f(a)=b$, entonces $f^{-1}(b)=a$.

Para encontrar la regla de correspondencia de la función inversa, se debe despejar x de la función original ya que, para la función inversa, esa es la variable dependiente. En otras palabras se efectúa el procedimiento siguiente:

- Se define $y=f(x)$
- Se intercambia x por y.
- Se manipular algebraicamente para despejar y que es $f^{-1}(x)$, es decir, la inversa de la función dada.

Es importante recalcar que *no todas las funciones tienen inversa*, sólo aquellas que son *biyectivas*.

Gráficamente, las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante y del tercer cuadrante.

Ejemplo.
Hallar la función inversa de las siguientes funciones y representar las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo sistema de ejes, trazando la diagonal $y=x$.

1) $f(x)=5x-2$
Solución.
Se hace $y=f(x) \quad \Rightarrow \quad y=5x-2$
Intercambiando las variables: $x=5y-2$
Despejando y:

$$x=5y-2 \quad \Rightarrow \quad x+2=5y \quad \Rightarrow \quad \frac{x+2}{5}=y$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$D_f=(-\infty,\infty)$

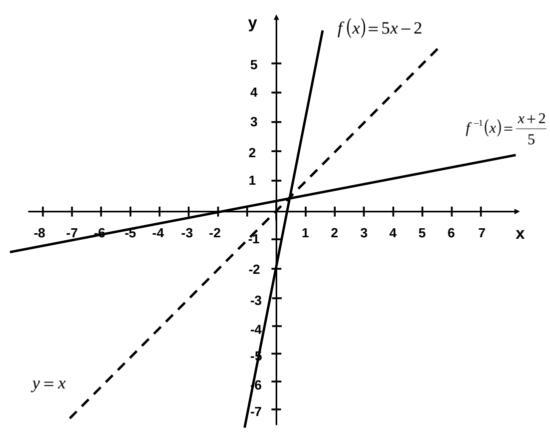
$R_f=(-\infty,\infty)$

$D_{f^{-1}}=(-\infty,\infty)$

$R_{f^{-1}}=(-\infty,\infty)$

Tabulando:

x	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
-4	-22	-0.4
-3	-17	-0.2
-2	-12	0
-1	-7	0.2
0	-2	0.4
1	3	0.6
2	8	0.8
3	13	1
4	18	1.2



2) $f(x)=\sqrt{x}+3$
Solución.
Se hace $y=f(x) \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{x}+3$

Se intercambian las variables: $x = \sqrt{y} + 3$

Despejando y:

$$x - 3 = \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 = y$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = (x-3)^2$$

Nótese como en esta función, para que aplique que si $f(a) = b$, siempre que $f^{-1}(b) = a$, entonces sólo aplica para valores mayores o iguales a tres.

$D_f = [0, \infty)$

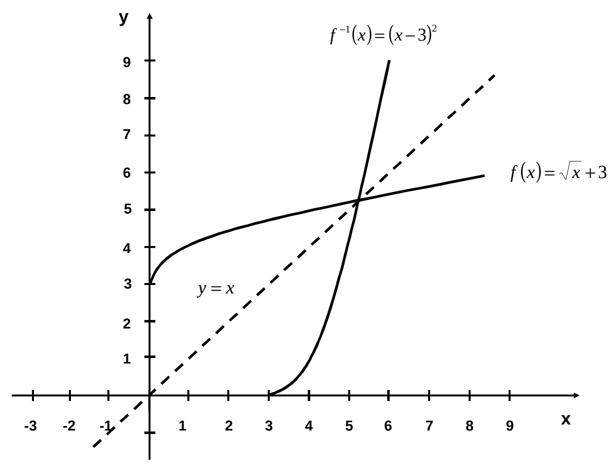
$R_f = [3, \infty)$

$D_{f^{-1}} = [3, \infty)$

$R_{f^{-1}} = [0, \infty)$

Tabulando:

x	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
0	3	No aplica
1	4	No aplica
2	4.41	No aplica
3	4.73	0
4	5	1
5	5.23	4
6	5.44	9
7	5.64	16
8	5.82	25
9	6	36



3) $f(x) = -2x + 4$

Solución.

Se hace $y = f(x) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 4$

Intercambiando las variables: $x = -2y + 4$

Despejando y:

$$x - 4 = -2y \quad \Rightarrow \quad \frac{x-4}{-2} = y$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{4-x}{2}$$

$D_f = (-\infty, \infty)$

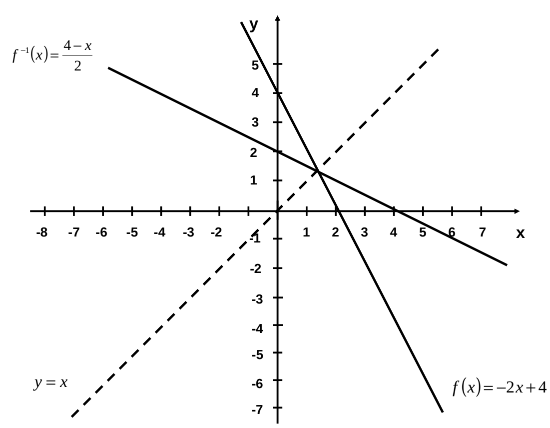
$R_f = (-\infty, \infty)$

$D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$

$R_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$

Tabulando:

x	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
-1	6	2.5
0	4	2
1	2	1.5
2	0	1
3	-2	0.5
4	-4	0
5	-6	-0.5
6	-8	-1



4) $f(x) = 2x^2 - 10$

Solución.

Se hace $y = f(x) \quad \Rightarrow \quad y = 2x^2 - 10$

Intercambiando las variables: $x = 2y^2 - 10$

Despejando y:

$$x + 10 = 2y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+10}{2} = y^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{x+10}{2}} = y$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+10}{2}}$$

Nótese como para que cumpla con la definición de función, sólo se toma la raíz positiva.

$D_f = (-\infty, \infty)$

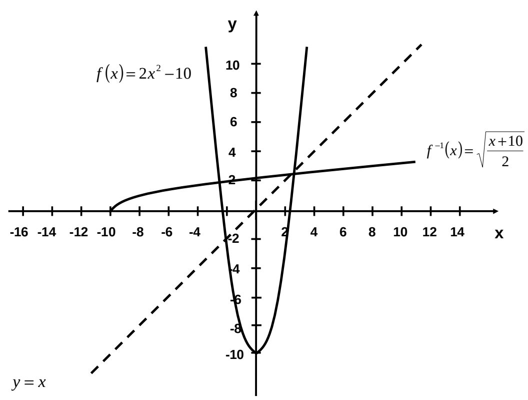
$R_f = [-10, \infty)$

$D_{f^{-1}} = [-10, \infty)$

$R_{f^{-1}} = [0, \infty)$

Tabulando:

x	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
-10	190	0
-9	152	0.70
-8	118	1
-7	88	1.22
-6	62	1.41
-5	40	1.58
-4	22	1.73
-3	8	1.87
-2	-2	2
-1	-8	2.12
0	-10	2.23
1	-8	2.34
2	-2	2.44
3	8	2.54
4	22	2.64



5) $f(x) = \frac{20x}{100 - x}$

Solución.

Se hace $y = f(x) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{20x}{100 - x}$

Intercambiando las variables: $x = \frac{20y}{100 - y}$

Despejando y:

$$(100 - y)x = 20y \quad \Rightarrow \quad 100x - xy = 20y \quad \Rightarrow \quad 100x = 20y + xy \quad \Rightarrow \quad 100x = (20 + x)y$$

$$\frac{100x}{20 + x} = y$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{100x}{20 + x}$$

$D_f = (-\infty, 100) \cup (100, \infty)$

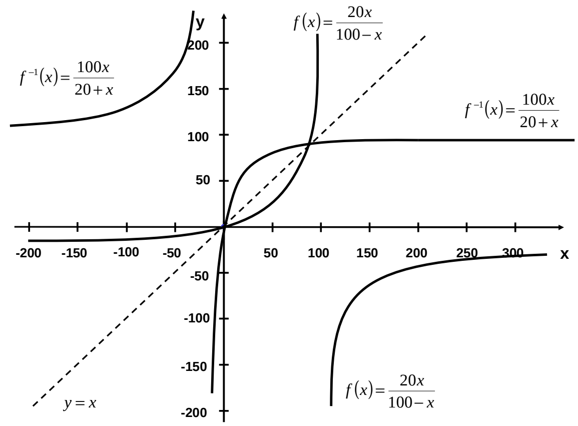
$R_f = (-\infty, -20) \cup (-20, \infty)$

$D_{f^{-1}} = (-\infty, -20) \cup (-20, \infty)$

$R_{f^{-1}} = (-\infty, 100) \cup (100, \infty)$

Tabulando:

x	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
-200	-13.33	111.11
-150	-12	115.38
-100	-10	125
-50	-6.66	166.66
-20	-3.33	No definido
0	0	0
50	20	71.42
100	No definido	83.33
150	-60	88.23
200	-40	90.90
250	-33.33	92.59
300	-30	93.75



6) En Estados Unidos los termómetros utilizan una escala llamada Fahrenheit, la cual es diferente a la escala centígrada que se usa en México. La expresión que relaciona a estas dos formas de medir la temperatura es: $F(C)=\frac{9C}{5}+32$.

Solución.

La función inversa, permite calcular la temperatura centígrada si se tiene la escala Fahrenheit. Esta conversión es muy aplicada en termodinámica:

$$F=\frac{9C}{5}+32 \quad \Rightarrow \quad C=\frac{9F}{5}+32 \quad \Rightarrow \quad C-32=\frac{9F}{5} \quad \Rightarrow \quad 5(C-32)=9F \quad \Rightarrow \quad \frac{5(C-32)}{9}=F$$

$$\therefore \quad F^{-1}(C)=\frac{5(C-32)}{9}$$

$D_f = (-\infty, \infty)$

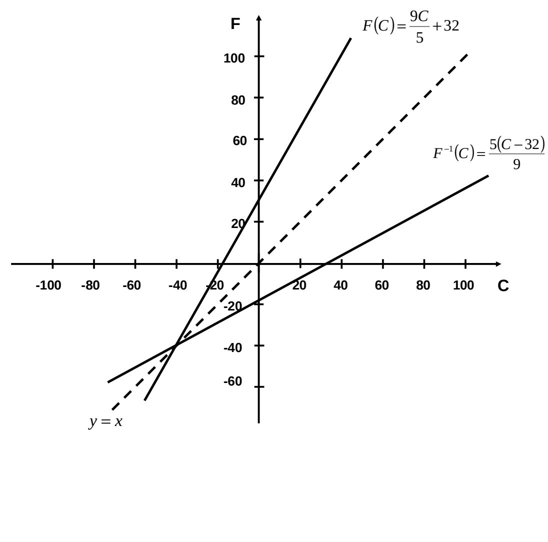
$R_f = (-\infty, \infty)$

$D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$

$R_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$

Tabulando:

C	$F(C)$	$F^{-1}(C)$
0	32	-17.77
10	50	-12.22
20	68	-6.66
30	86	-1.11
40	104	-4.44
50	122	10
60	140	15.55
70	158	21.11
80	176	26.66
90	194	32.22
100	212	37.77



I.8 APLICACIONES

Los números y las relaciones entre ellos pueden representarse como enunciados simbólicos, los cuales brindan un medio para modelar, investigar y mostrar las relaciones del mundo real. Es raro el interés en una sola cantidad o categoría. Generalmente interesa la relación entre ellas (la relación entre edad y estatura, temperatura y hora del día, sexo y ocupación, etc.). Esas comparaciones se pueden expresar utilizando ilustraciones diagramas, gráficas, cuadros, ecuaciones algebraicas o palabras. Las gráficas son especialmente útiles para examinar las relaciones entre cantidades.

Hay muchas clases posibles de relaciones entre una variable y otra. Un conjunto básico de ejemplos sencillos de estas relaciones incluye:

1) *Directamente proporcional*, en la que una cantidad siempre mantiene la misma proporción con otra. Por ejemplo, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza F ejercida que se ejerce a un cuerpo es directamente proporcional a la aceleración a que recibe su masa m, en términos de función: $F = m \cdot a$

2) *Inversamente proporcional*, en la que a medida que una cantidad aumenta, la otra disminuye en proporción. Por ejemplo, cuando en un móvil la velocidad v aumenta el tiempo t que emplea para desplazarse de un punto d a otro disminuye: $v = \frac{d}{t}$.

3) *Acelerada*, cuando una cantidad se incrementa uniformemente, la otra aumenta más y más rápido. Por ejemplo, de acuerdo con la Ley de Joule, en un conductor eléctrico de resistencia R la disipación de calor P está dada por el cuadrado de la intensidad de corriente eléctrica i: $P = R \cdot i^2$

4) *Convergente*, a medida que cierta cantidad se incrementa sin limite, la otra se aproximará más y más a algún valor límite. Por ejemplo, en la función $y = \frac{x}{x+1}$ a medida de que x crece ilimitadamente el cociente es cada vez más cercano a la unidad.

5) *Cíclica*, al incrementarse una cantidad, la otra aumenta y disminuye en ciclos repetidos. Por ejemplo, las estaciones del año tienen un comportamiento cíclico: desde que inicia la primavera en el hemisferio norte a medida que transcurre el tiempo los días cada vez son más largos hasta llegar al solsticio de verano. En otoño a medida que transcurre el tiempo los días cada vez son más cortos hasta que llega el solsticio de invierno. Para el hemisferio sur, el comportamiento es exactamente al revés.

6) *Escalonada*, al cambiar una cantidad continuamente, la otra lo hace en saltos. Por ejemplo, en algunos países los contribuyentes pagan impuestos de acuerdo a una tarifa de bloques. Están exentos de impuestos los trabajadores que tengan un ingreso anual menor de $10,000$ dólares. Pagan el 10% de impuesto quienes hayan ganado hasta $20,000$ dólares anules. Aquellas personas que rebasen los $20,000$ dólares al año en ingreso pagan un impuesto de 15%.

Con frecuencia, la cantidad que más interesa es la rapidez con que algo cambia, más que el cambio mismo. En algunos casos, el índice de cambio de una cantidad depende de otra, por ejemplo, el cambio de presión en un líquido es proporcional a la fuerza que se le aplica. Sin embargo, en otras situaciones, el índice de cambio es proporcional a la cantidad misma, por ejemplo, el número de recién nacidos dentro de una población de ratones depende del número y sexo de los animales ya existentes.

En este sentido se pueden mencionar algunas aplicaciones de funciones:

1. Comportamiento económico de costos (punto de equilibrio entre oferta y demanda).

2. La gráfica de una función suele mostrar mas claramente la relación entre dos variables que una tabla o una ecuación, como en los precios semanales al cierre de las acciones de alguna empresa.
3. Al graficar como se mueve un objeto con velocidad constante en una trayectoria rectilínea.
4. Las relaciones se pueden aplicar en un experimento, teniendo un líquido sobre el fuego se puede relacionar las temperaturas del líquido con respecto al tiempo que permanece sobre el fuego.
5. Efecto de la gravedad en la Tierra. Si una piedra cae desde una altura de h_0 metros. Sobre la tierra, la altura h después de t segundos, esta dada aproximadamente por la expresión: $h = h_0 - 4.9t^2$.